RELACIONET

1. RELACIONI BINAR

Përkufizimi 1. *Le të jenë A, B dy bashkësi të çfarëdoshme. Çdo nënbashkësi e bashkësisë $A \times B$ është **relacion binar** i bashkësisë A në bashkësinë B. Simbolikisht relacionin do ta shënojmë me ρ.*

Shembulli 1. Le të jenë $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b\}$.

Cilat nga bashkësitë

$X = \{(1,b),(1,a),(2,a)\}$, $Y = \{(1,1),(1,2),(1,3)\}$, $Z = \{(1,a), (3,3)\}$

paraqesin relacion binar të bashkësisë A në bashkësinë B?

Zgjidhja.

Së pari caktojmë $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$. Prandaj, meqë $X \subset A \times B$ dhe $Y \not\subset A \times B$, $Z \not\subset A \times B$ përfundojmë se bashkësia X paraqet relacion binar të bashkësisë A në bashkësinë B.

Nëse $(a,b) \in \rho$ themi se a **është në relacion me** b dhe këtë mund ta shënojmë $a \rho b$.

Nëse $(a,b) \notin \rho$ themi se a **nuk është në relacion me** b dhe këtë mund ta shënojmë a $jo\,\rho\, b$ (apo $a \overline{\rho} b$).

Nëse shqyrtojmë bashkësitë e mësipërme $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b\}$ dhe nëse $\rho = \{(1,a),(2,b),(3,a)\}$ është relacion i bashkësisë A në bashkësinë B kemi $1\rho a, 2\rho b, 3\rho a$ por $3\ jo\,\rho\, b, 1\ jo\,\rho$.

Relacioni i bashkësisë A në bashkësinë A quhet **relacion në bashkësinë** A.

Përkufizimi 2. Relacioni invers i relacionit $\rho \subseteq A \times B$ është

bashkësia $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ që jepet me:

$$\rho^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in \rho.\}$$

Vërejmë se nëse ρ paraqet relacion të bashkësisë A në bashkësinë B atëherë ρ^{-1} paraqet relacion të bashkësisë B në bashkësinë A.

Shembulli 2. Le të jenë dhënë bashkësitë $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3\}$ si dhe relacionet:

$a)\ \rho_1 = \{(2,2),(2,3)\}$; $b)\ \rho_2 = A \times B.$

Atëherë $\rho_1^{-1} = \{(2,2),(3,2)\}$; $\rho_2^{-1} = B \times A.$

A ekziston relacioni ρ i cili është i barabartë me relacionin invers ρ^{-1}?
Le të jetë $A = \{a,b,c,d\}, B = \{a,c,d\}$ si dhe relacioni $\rho = \{(a,a),(c,c),(d,d)\}$.
Është e qartë se $\rho = \rho^{-1}$.

Shembulli 3. Le të jenë dhënë bashkësitë $A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,3,5\}$. Të caktohen relacionet:

$a)\ \rho = \{(x,y) : y = x+2\}$ $b)\ \rho = \{(x,y) : x = y-1\}$

$c)\ \rho = \{(x,y) : y = x^2\}$

Zgjidhja.

a) Meqë $\underbrace{3}_{y} = \underbrace{1}_{x} + 2;\ \underbrace{5}_{y} = \underbrace{3}_{x} + 2$ përfundojmë se $\rho = \{(1,3),(3,5)\}$.

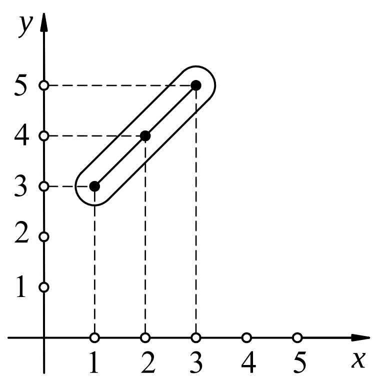
b) $\rho = \{(2,3),(4,5)\}$.

c) Meqë katrori i numrave të bashkësisë A është: $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16$ dhe asnjëri nga numrat $1,4,9,16$ nuk i takon bashkësisë B përfundojmë se $\rho = \varnothing$. Një gjë e tillë ka kuptim në bazë të faktit se $\varnothing \subset A, \forall A$.

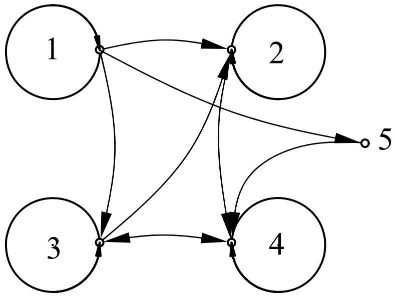
Shembulli 4. Është dhënë bashkësia $A = \{1,2,3,4,5\}$ dhe relacioni $\rho = \{(x,y) \mid y = x+2\}$. Të caktohen elementet e relacionit ρ dhe të paraqitet grafikisht në bashkësinë A^2.

Zgjidhja.

$\rho = \{(1,3),(2,4),(3,5)\}$.



Shembulli 5. Në bashkësinë $A=\{1,2,3,4,5\}$ relacioni ρ është paraqitur në mënyrë grafike. Të caktohen elementet e relacionit ρ.



Zgjidhja.

Së pari vërejmë se $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\in\rho$. Por $(5,5)\notin\rho$. Duke përcjellur shigjetat që dalin nga elementi 1 vërejmë se $(1,2),(1,3),(1,5)\in\rho$.

Duke vepruar ngjashëm me elementet 2,3,4,5 merret:

$(2,4)\in\rho,(3,2)\in\rho,(3,4)\in\rho,(4,3)\in\rho,(5,4)\in\rho$.

Përfundojmë se:

$$\rho=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,4)\}.$$

Vërejmë se paraqitja në mënyrë grafike në disa raste të relacioneve mund të jetë shumë e komplikuar dhe nga një paraqitje të tillë nuk mund të vërejmë pothuajse asgjë.

Për këtë arsye e përdorim paraqitjen matricore të relacioneve:

Shembulli 6. Në bashkësinë $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ është dhënë relacioni

$$\rho=\{(x,y)\mid x+y>3\}.$$

a) Të caktohen elementet e relacionit të dhënë.

b) Të paraqitet në mënyrë grafike dhe matricore relacioni ρ.

Zgjidhja.

a) $\rho=\{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$

$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$

$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$

b) Paraqiten grafikishik relacionin e dhënë.

Në vijim le të paraqesim në mënyrë matricore relacionin e dhënë.

$$A(\rho)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le të sqarojmë se si është plotësuar tabela:

Vërejmë se elementi a_{ij} i matricës merr vlerën 1 nëse elementi $(i, j)\in\rho$.

Në të kundërtën elementi a_{ij} i matricës merr vlerën 0.

P.sh. meqë $(1,1)\notin\rho$ atëherë elementi a_{11} merr vlerën 0. Meqë $(1,3)\in\rho$ atëherë elementi a_{13} merr vlerën 1.

2. RELACIONI I EKUIVALENCËS

Përkufizimi 1. Le të jetë ρ relacion binar në bashkësinë *X*.

1) Relacioni ρ është **refleksiv** nëse $x\rho x,\ \forall x\in X$.
2) Relacioni ρ është **simetrik** nëse $x\rho y \Rightarrow y\rho x,\ \forall x,y\in X$.
3) Relacioni ρ është **transitiv** nëse
$$x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z,\ \forall x,y,z\in X.$$
4) Relacioni ρ është **jorefleksiv** nëse
$$x \text{ jo}\rho x,\ \forall x,\in X.\ ((x,x)\notin\rho, \forall x,\in X)$$
5) Relacioni ρ është **antisimetrik** nëse $x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x=y$.

Shembulli 1. Le të jetë $X=\{1,2,3\}$. Atëherë relacioni $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ është relacion refleksiv, sepse për çdo $x\in X$, $(x,x)\in\rho$. Por relacionet $\rho_1=\{(1,1),(3,3)\}$ dhe $\rho_2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(3,3)\}$ nuk janë relacione refleksive sepse (në të dy rastet) $2\in X$ por $(2,2)\notin\rho_1$, $(2,2)\notin\rho_2$.

Shembulli 2. Le të jetë X si në shembullin 1. Relacioni $\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,3)\}$ është relacion simetrik (pse?) por relacioni $\rho_1 = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ nuk është simetrik, sepse sipas përkufizimit të relacionit simetrik meqë $(1,2) \in \rho_1$ do të duhej që $(2,1) \in \rho_1$, gjë që shihet qartë se nuk vlen.

Shembulli 3. Relacioni $"<"$ në bashkësinë e numrave natyrorë është transitiv sepse $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z, \ \forall x, y, z \in N$. Por p.sh. relacioni $\rho_1 = \{(x,y) \mid |x-y| \leq 1\}$ në bashkësinë Z nuk është relacion transitiv sepse p.sh. për $x = 4; \ y = 3; \ z = 2$, vërtetë $|x-y| \leq 1$ dhe $|y-z| \leq 1$ por nuk vlen $|x-z| \leq 1$ sepse $|4-3| \leq 1, \ |3-1| \leq 1$ por nuk është e saktë që $|4-2| \leq 1$.

Shënimi 1. Duhet të kemi kujdes gjatë shqyrtimit të relacionit refleksiv dhe jorefleksiv. Nëse një relacion nuk është **refleksiv** kjo nuk do të thotë se ai doemos është **jorefleksiv.** P.sh. në shembullin 1 treguam se relacioni $\rho_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,3)\}$ nuk është refleksiv por relacioni ρ_2 nuk është as relacion jorefleksiv. Pse?

Shënimi 2. Po ashtu nëse relacioni nuk është simetrik, nuk do të thotë se ai doemos duhet të jetë **antisimetrik.** P.sh. në bashkësinë $X = \{1,2,3,4\}$ relacioni binar $\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1)\}$ nuk është simetrik sepse $(1,2) \in \rho$ por $(2,1) \notin \rho$. Megjithatë relacioni ρ nuk është as **antisimetrik** sepse $(1,3) \in \rho, \ (3,1) \in \rho$ por nuk vlen 1 = 3.

Shembulli 4. Në bashkësinë N, përkufizojmë relacionin "$|$" e pjesëtueshmërisë $a \mid b \Leftrightarrow (\exists n \in N), \ b = an$

Relacioni $|$ është **refleksiv**, sepse $(\forall a \in N) \ a \mid a \ (a = 1 \cdot a)$.

Relacioni $|$ **nuk është simetrik**, seps p.sh. 2|4 (4 = 2 · 2) por 4 jo|2 (nuk ekziston numri natyror n ashtu që $2 = 4n$). Por relacioni $|$ është antisimetrik sepse nëse $a \mid b$ dhe $b \mid a$ atëherë $\exists m, n \in N \mid b = am, \ a = n \cdot b$ prej nga $b = n \cdot b \cdot m$, d.m.th. $m \cdot n = 1$, e kjo është e mundur vetëm nëse $m = n = 1$. Pra $a = b$.

Relacioni është **transitiv** sepse nëse $a \mid b$ dhe $b \mid c$ atëherë $\exists m, n \in N \mid b = am$ dhe $c = bn$, prandaj $c = amn$, pra, ekziston numri natyror $n_1 = mn$ ashtu që $c = an_1$, prandaj $a \mid c$.

Përkufizimi 2. Relacioni që është **refleksiv**, **simetrik** dhe **transitiv** quhet **relacion ekuivalence**.

Shembulli 5. Në bashkësinë e numrave racional Q është dhënë relacioni ρ si vijon $a\rho b \Leftrightarrow a-b \in Q$.

Të vërtetohet se relacioni ρ është relacion ekuivalence.

Zgjidhja.

Provojmë vetitë 1) – 3) të përkufizimit 1.

1) $a\rho a \Leftrightarrow a-a=0 \in Q$ (0 është numër racional)

2) $a\rho b \Rightarrow a-b \in Q \Rightarrow -(b-a) \in Q \Rightarrow b-a \in Q$

3) $a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a-b \in Q \wedge b-c \in Q \Rightarrow (a-b)+(b-c) \in Q \Rightarrow a-c \in Q$,

gjë që duhej treguar.

Le të jetë ρ relacion i ekuivalencës në X dhe le të jetë $x \in X$.

Bashkësia e të gjitha elementeve y nga X, të cilët janë në relacion ρ me elementin x quhet **klasë e ekuivalencës** e elementit x dhe shënohet me C_x.

Pra $C_x = \{y \in X \mid x\rho y\}$.

Meqë $\forall x \in X$, $x\rho x$ atëherë $x \in C_x$

D.m.th. çdo element i takon klasës së vet të ekuivalencës, pra asnjë klasë e ekuivalencës nuk është bashkësi boshe.

Tregohet se dy klasë të ekuivalencës ose janë disjunkte ose përputhen. Për këtë, relacioni i ekuivalencës e zbërthen bashkësinë X në nënbashkësi joboshe disjunkte (klasë të ekuivalencës) unioni i të cilave është X. Pra $X = \bigcup_{x\in X} C_x$ (ose $X = \bigcup\{Cx \mid x \in X\}$.)

Faktor bashkësia është bashkësia e klasëve të ekuivalencës.

Shembulli 6. Në bashkësinë Z, relacioni i kongruencës sipas modulit 2 definohet si vijon:

$$a \equiv b \pmod 2 \Leftrightarrow (\exists k \in Z) \mid a-b=2k.$$

a) Të vërtetohet se relacioni i mësipërm është **relacion i ekuivalencës.**

b) Të caktohen **klasët e ekuivalencës**.

c) Të caktohet **faktor bashkësia**.

Zgjidhja.

a) Provojmë vetitë 1) – 3) të përkufizimit 1.

1) $\forall a \in Z,\ a \equiv a \pmod 2 a - a = 0 \cdot a = 0 \cdot 2.$

2) $\forall a, b \in Z,\ a \equiv b \pmod 2 \Rightarrow \exists k \in Z \mid a - b = 2k$

$$\Rightarrow b - a = -2k \Rightarrow b - a = 2k_1,\ k_1 = -k \Rightarrow b \equiv a \pmod 2.$$

3) $\forall a, b, c \in Z,\ a \equiv b \pmod 2 \wedge b \equiv c \pmod 2$

$$\Rightarrow \exists k, k_1 \in Z \mid a - b = 2k, b - c = 2k_1$$

$$\Rightarrow (a - b) + (b - c) = 2k + 2k_1 \Rightarrow a - c = 2(k + k_1)$$

$$\Rightarrow a - c = 2k_2, k_2 = k + k_1 \Rightarrow a \equiv c \pmod 2.$$

b) Kemi dy klasë të ekuivalencës

$$C_0 = \{2k : k \in Z\},\ C_1 = \{2k + 1; k \in Z\}$$

sepse

$$\begin{aligned} C_0 &= \{y \in Z \mid y \equiv 0 \pmod 2\} \\ &= \{y \in Z \mid y - 0 = 2k, k \in Z\} \\ &= \{y \in Z \mid y = 2k, k \in Z\} \\ &= \{2k, k \in Z\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \{y \in Z \mid y \equiv 1 \pmod 2\} \\ &= \{y \in Z \mid y - 1 = 2k, k \in Z\} \\ &= \{y \in Z \mid y = 2k + 1, k \in Z\} \\ &= \{2k + 1, k \in Z\} \end{aligned}$$

Çfarë ndodhë me $C_2, C_3, \ldots$?

c) Do të shënojmë faktor bashkësinë $Z|_{\equiv \pmod 2}$.

Atëherë $Z|_{\equiv \pmod 2} = \{C_0, C_1\} = \{\{2k : k \in Z\}, (2k + 1, k \in Z\}\}$.

3. RELACIONI I RENDITJES

Përkufizimi 1. Relacioni që është **refleksiv**, **antisimetrik** dhe **transitiv** quhet **relacion i renditjes**.

Shembulli 1. Të vërtetohet se relacioni $"\leq"$ i definuar si vijon:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vdots b,\ a, b \in N$$

është relacion i renditjes.

Zgjidhja.

Duhet provuar vetitë 1), 3), 5) të përkufizimit 1 të njësisë paraprake.

1) $a \le a \Leftrightarrow a \vdots a,$

2) $a \le b \wedge b \le c \Leftrightarrow a \vdots b \wedge b \vdots c \Rightarrow \exists k, k_1 \in N \mid a = k \cdot b \wedge b - k_1 \cdot C$

$\Rightarrow a = k \cdot k_1 \cdot C \Rightarrow a = k_2 \cdot C,\ k_2 = k \cdot k_1 \Rightarrow a \vdots c \Rightarrow a \le c.$

3) $a \le b \wedge b \le a \Rightarrow a \vdots b \wedge b \vdots a \Rightarrow a = kb,\ b = k_1 a, k, k_1 \in N \Rightarrow a = b.$ Pse?