

## ELEMENTE NGA TEORIA E NUMRAVE

### AKSIOMA MBI RENDITJEN E MIRË

**Aksioma 1.** Çdo nënbashkësi joboshe  $S$  e numrave natyrorë e ka elementin më të vogël.

Le të shfrytëzojmë aksiomën e mësipërme në shembullin vijues.

**Shembulli 1.** Të vërtetohet se në intervalin  $(0,1)$  nuk ka asnjë numër të plotë.

#### Zgjidhja.

Supozojmë të kundërtën. Pra, supozojmë se bashkësia  $S$  e numrave të plotë nga intervali  $(0,1)$  nuk është boshe.

Tani, meqë  $S$  është nënbashkësi e numrave natyrorë, në bazë të aksiomës mbi renditjen e mirë bashkësia  $S$  e ka elementin më të vogël  $m$ . Pra, vlen  $0 < m < 1$ .

Por, gjithashtu për  $m$  të tillë vlen  $0 < m^2 < m < 1$ . D.m.th.  $m^2$  si numër i plotë është element i bashkësisë  $S$ .

Kjo d.m.th. se  $S$  ka numrin e plotë pozitiv  $m^2$  që është më i vogël se numri më i vogël pozitiv i asaj bashkësie (e që është  $m$ ).

Kjo paraqet kontradiksion. Pra, mbetet që  $S = \emptyset$ .

### PLOTPJESTUESHMËRIA E NUMRAVE TË PLOTË

**Përkufizimi 1.** Numri  $a$  e pjesëton numrin  $b$  nëse ekziston numri i plotë  $k$  i tillë që  $b = a \cdot k$ .

Përkufizimi 1 është ekuivalent me Përkufizimin 2.

**Përkufizimi 2.** Numri  $a$  e pjesëton numrin  $b$  nëse mbetja që fitohet gjatë pjesëtimit të numrit  $a$  me  $b$  është zero.

**Shembulli 2.** Të vërtetohet se çdo numër natyror (në sistemin dhjetor) që përmban vetëm shifrat 2 dhe 6 mund të shkruhet në trajtën  $4k + 2$ , për ndonjë  $k$  numër të plotë jonegativ. Pastaj të tregohet se numri që ka vetëm shifrat 2 dhe 6 nuk mund të shprehet si ndryshim i katrorëve të dy numrave natyrorë.

#### Zgjidhja.

Së pari përkujtojmë se numri i çfarëdoshëm natyror  $n_1$  në sistemin dhjetor shprehet si vijon

$$n_1 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \quad (1)$$

ku  $a_0, a_1, \dots$  janë shifra e njësheve, dhjetësheve, qindësheve etj.

Pra,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ .

P.sh.  $927 = 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7$ ,  $2004 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 4$ .

Tani numri natyror që përbëhet vetëm nga shifrat 2 dhe 6 shkruhet në formën (1) por në këtë rast  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{2, 6\}$ .

P.sh.

$$266626 = 2 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$$

apo

$$6262 = 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2.$$

Poashtu vërejmë se numrat 6 dhe 2 janë të trajtës  $4k + 2$ , ku  $k$  është numër i plotë jonegativ. Pse?

Pra të gjithë numrat  $a_k$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  janë të trajtës  $4k + 2$ .

Atëherë numrin  $n_1$  e shkruajmë si vijon:

$$\begin{aligned} n_1 &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ &= (4k_n + 2) \cdot 10^n + (4k_{n-1} + 2) \cdot 10^{n-1} + \dots + (4k_1 + 2) \cdot 10 + (4k_0 + 2) \\ &= 4(k_n \cdot 10^n + k_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + k_1 \cdot 10 + k_0) + 2 \cdot 10^n + 2 \cdot 10^{n-1} + \dots + 2 \cdot 10 + 2 \\ &= 4(k_n \cdot 10^n + k_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + k_1 \cdot 10 + k_0) + 2 \cdot 2 \left( \frac{10^n}{2} + \frac{10^{n-1}}{2} + \dots + \frac{10}{2} \right) + 2 \\ &= 4(k_n \cdot 10^n + k_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + k_1 \cdot 10 + k_0) + 4(2^{n-1}5^n + 2^{n-2}5^{n-1} + \dots + 5) + 2 \\ &= 4(A + B) + 2 = 4k + 2, \text{ ku } k = A + B \text{ kurse} \end{aligned}$$

$$A = k_n \cdot 10^n + k_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + k_1 \cdot 10 + k_0, \quad B = 2^{n-1}5^n + 2^{n-2}5^{n-1} + \dots + 5.$$

Pra, treguam se numri natyror që përmban vetëm shifrat 2 dhe 6 mund të shkruhet në trajtën  $4k + 2$ .

Le të tregojmë tani se numri që ka vetëm shifrat 2 dhe 6 nuk mund të shprehet si ndryshim i katrorëve të dy numrave natyrorë.

Supozojmë të kundërtën, pra se ekzistojnë numrat natyrorë  $m, n$  të tillë që  $m^2 - n^2 = 4k + 2$ .

Atëherë

$$(m-n) \cdot (m+n) = 2 \cdot (2k+1).$$

D.m.th. njëri nga numrat  $m-n$  dhe  $m+n$  është çift, kurse tjetri është tek. Por kjo nuk është e mundur sepse numrat  $m-n, m+n$  janë njëkohësisht ose çift ose tek. Pse?

Pra, supozimi ynë na solli në kundërshtim. Me këtë kemi përfunduar vërtetimin.

Le të kthehemi tek plotpjestueshmëria.

**Pohimi 1.** *Le të jenë  $a, b$  numra që plotpjesëtohen me  $d$ . Atëherë edhe shuma dhe prodhimi i tyre plotpjesëtohet me  $d$ .*

**Rrjedhimi 1.** *Nëse  $a, b$  janë numra që plotpjesëtohen me  $d$ , prodhimi i tyre plotpjesëtohet me  $d^2$ .*

Shtrohet pyetja. *A vlen pohimi i anasjelltë?*

Pra, nëse  $a+b, a \cdot b$  pjesëtohet me  $d$  a do të thotë që edhe  $a$  dhe  $b$  plotpjesëtohen me  $d$ ?

Le të tregojmë se kjo nuk vlen në rastin e përgjithshëm.

Kështu për  $a=11, b=9$  dhe  $d=4$  kemi  $a+b=20$ . Numri 20 plotpjesëtohet me 4 por as 11 e as 9 nuk plotpjesëtohen me 4.

Ngjashëm tregohet për prodhimin.

P.sh. për  $a=8, b=9$  dhe  $d=6$  kemi  $a \cdot b=72$ , 72 plotpjesëtohet me 6 por as 8 e as 9 nuk plotpjesëtohen me 6.

Fakti që numri  $a$  e pjesëton numrin  $b$  simbolikisht shënohet  $a|b$ . Nëse numri  $a$  nuk e pjesëton numrin  $b$  simbolikisht shënojmë  $a \nmid b$ .

Po ashtu lehtë tregohet se vlenë:

**Pohimi 2.** *Nëse  $m, n, d$  janë numra të plotë atëherë:*

- 1)  $n|n$ ;      2)  $d|n \Rightarrow ad|an$ ;      3)  $ad|an, a \neq 0 \Rightarrow d|n$ ;
- 4)  $1|n$ ;      5)  $n|1 \Rightarrow n = \pm 1$ ;      6)  $d|0$ ;
- 7)  $0|n \Rightarrow n=0$ ;
- 8) *Nëse  $d$  dhe  $n$  janë numra të plotë pozitiv dhe  $d|n$  atëherë  $d \leq n$ .*
- 9) *Nëse  $a|b$  dhe  $b|a$  atëherë  $a=b$ .*

## PJESËTUESI MË I MADH I PËRBASHKËT

Më parë pamë se  $4|12$ . Poashtu  $4|24$ . D.m.th. 4 qenka pjesëtues edhe i numrit 12 e edhe i numrit 24. Japim këtë përkufizim:

**Përkufizimi 3.** Numri i plotë  $d$  është pjesëtues i përbashkët i numrave të plotë  $a, b$  nëse  $d|a$  dhe  $d|b$ .

Le të japim këtë përkufizim.

**Përkufizimi 4.** Pjesëtuesi më i madh i përbashkët i dy numrave të plotë  $a, b$  është numri më i madh i plotë  $d$  i tillë që  $d|a$  dhe  $d|b$ . Simbolikisht shënojmë  $d = (a, b)$ .

**Përkufizimi 4'.** Numri  $d$  është pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave  $a, b$  nëse:

$$i) \quad d|a, d|b;$$

$$ii) \quad \text{Nëse } d_1|a \text{ dhe } d_1|b \text{ atëherë } d_1|d.$$

Në vijim paraqesim një teoremë e cila luan rol të rëndësishëm në teorinë e numrave.

**Teorema 1.** (Algoritmi i pjestueshmërisë) Nëse  $a$  dhe  $b, b > 0$  janë numra të plotë, atëherë ekzistojnë dhe janë të vetëm numrat  $q$  dhe  $r$  që plotësojnë kushtet:

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Në këtë rast  $q$  quhet herësi kurse  $r$  mbetja që merret gjatë pjesëtimit të numrit  $a$  me  $b$ .

Vërejmë se ky rezultat ka dy pjesë. Pjesa e parë është **EKZISTENCA**, kurse pjesa e dytë është **UNICITETI**.

Po ashtu tregohet se vlen

**Teorema 2:** Nëse  $a = b \cdot q + r$  atëherë  $(a, b) = (b, r)$ .

Le të shohim tani me anë të një shembulli zbatimin e teoremave të mësipërme.

**Shembulli 3.** Njehsoni (8588, 2448).

**Zgjidhja.**

Pak kush "do të kishte durim" që të caktoj faktorët e numrave 8588 dhe 2448, e që pastaj të caktojë faktorët e përbashkët dhe në fund faktorin më të madh të përbashkët.

Le të zbatojmë Teoremën 1.

$$8588 = 2448 \cdot 3 + 1244.$$

Pra  $(8588, 2448) = (2448, 1244)$ .

E zbatojmë sërish Teoremën 1.

$$2448 = 1244 \cdot 1 + 1204.$$

D.m.th.  $(2448, 1244) = (1244, 1204)$ .

Vazhdojmë të zbatojmë Teoremën 1:

$$1244 = 1204 \cdot 1 + 40.$$

Pra  $(1244, 1204) = (1204, 40)$ .

$$1204 = 40 \cdot 30 + 4.$$

D.m.th.  $(1204, 40) = (40, 4)$ .

$$40 = 4 \cdot 10 + 0.$$

Pra  $(40, 4) = (4, 0)$ .

Meqë  $(4, 0) = 4$  përfundojmë se

$$(8588, 2448) = (2448, 1244) = (1244, 1204) = (1204, 40) = (40, 4) = (4, 0) = 4.$$

Pra  $(8588, 2448) = 4$ .

Po sa është  $(7, 8), (3, 13)$ ?

Është e qartë se vetëm numri 1 plotëson kushtet:  $1 \mid 7, 1 \mid 8$ . Pra  $(7, 8) = 1$ .

Ngjashëm  $(3, 13) = 1$ .

**Përkufizimi 5.** Numrat  $a, b$  quhen relativisht të thjeshtë nëse  $(a, b) = 1$ .

**Teorema 3.** Nëse  $d = (a, b)$  atëherë  $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ .

Po ashtu vlejné edhe teoremat vijuese:

**Teorema 4.** Nëse  $k > 0$  atëherë  $(ka, kb) = k(a, b)$ .

**Teorema 5.** Nëse  $a = bq$  dhe  $b \geq 0$  atëherë  $(a, b) = b$ .

Le të cekim se kuptimi i pjesëtuesit më të madh të përbashkët mund të përgjithësohet.

Le të jenë  $a_1, a_2, \dots, a_n$  numra të plotë jonegativ me ç'rast së paku njëri prej tyre është i ndryshëm nga zero.

Për numrin më të madh të plotë pozitiv  $d$ , i cili është pjesëtues i të gjithë numrave  $a_1, a_2, \dots, a_n$  themi se është pjesëtuesi më i madh i përbashkët dhe shënohet  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

P.sh.  $(12, 40, 48) = 4$ .

Ngjashëm si në rastin me pjesëtuesin më të madh të përbashkët të dy numrave, që të tregojmë se  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$  duhet të tregojmë se:

- i)  $d \mid a_i$ , për  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- ii) nëse  $r \mid a_i$  për  $i = 1, 2, \dots, n$  atëherë  $r \mid d$ .

Në lidhje me këtë japim këtë teoremë.

Po ashtu mund të përgjithësojmë kuptimin e numrave relativisht të thjeshtë.

Le të jenë  $a_1, a_2, \dots, a_n$  numra të plotë, ashtu që së paku njëri prej tyre të jetë i ndryshëm prej 0.

Nëse  $(a_i, a_j) = 1$  për  $1 \leq i < j \leq n$  themi se numrat  $a_1, a_2, \dots, a_n$  janë dy nga dy relativisht të thjeshtë.

Nëse  $(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$  atëherë numrat  $a_1, a_2, \dots, a_n$  janë relativisht të thjeshtë.

Kështu numrat 6, 11, 14, 18 janë relativisht të thjeshtë  $(6, 11, 14, 18) = 1$  por nuk janë relativisht të thjeshtë dy nga dy sepse  $(6, 14) = 2$ .

## SHUMËFISHI MË I VOGËL I PËRBASHKËT

**Përkufizimi 6.** Për numrin  $k$  themi se është shumëfish i përbashkët i numrave të plotë  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nëse  $a_1 \mid k, a_2 \mid k, \dots, a_n \mid k$ .

Sikur së paku njëri prej numrave të plotë  $a_1, a_2, \dots, a_n$  të jetë 0 atëherë zeroja është shumëfish i përbashkët i numrave  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Nëse  $a_1, a_2, \dots, a_n$  janë të ndryshëm nga zero, bashkësia e shumëfishave të përbashkët të tyre përmban edhe numra natyrorë p.sh. numrin

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n|.$$

Si rrjedhim kjo bashkësi është joboshe.

Në bazë të aksiomës së renditjes së mirë, bashkësia e shumëfishëve të përbashkët të numrave natyrorë  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ka element minimal të cilin e quajmë **shumëfishi më i vogël i përbashkët** i numrave  $a_1, a_2, \dots, a_n$  dhe i cili simbolikisht shënohet  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ .

**Përkufizimi 7.** *Shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave të plotë  $a_1, a_2, \dots, a_n$  quhet numri natyror  $m$  i tillë që:*

- i)  $a_1 | m, a_2 | m, \dots, a_n | m$
- ii) Nëse  $n \in \mathbb{N}$  dhe  $a_1 | n, a_2 | n, \dots, a_n | n$  atëherë  $m \leq n$ .

Në lidhje me shumëfishin më të vogël të përbashkët vlejné teoremat vijuese:

**Teorema 6.** *Nëse  $m = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  dhe  $n$  cilido shumëfish i përbashkët i numrave  $a_1, a_2, \dots, a_n$  atëherë  $m | n$  që d.m.th. se të gjithë shumëfishët e përbashkët të numrave  $a_1, a_2, \dots, a_n$  janë të trajtës  $m = n \cdot q, q \in \mathbb{Z}$ .*

**Teorema 7.** *Le të jenë  $a, b$  numra të plotë. Vlen  $(a, b) \cdot [a, b] = |a \cdot b|$ .*

## LEMA E BEZOUT

Në vijim do të vërtetojmë një pohim që luan rol të rëndësishëm në teorinë e numrave.

**Pohimi 3 (Lema e Bezout)** *Le të jetë  $d = (a, b)$ . Ekzistojnë numrat e plotë  $m, n$  të tillë që*

$$m \cdot a + n \cdot b = d.$$

**Pohimi 4.** *Numrat  $a, b$  janë relativisht të thjeshtë atëherë dhe vetëm atëherë nëse ekzistojnë numrat e plotë  $x, y$  të tillë që*

$$ax + by = 1.$$

**Teorema 8.** *Le të jenë  $a, b \in \mathbb{N} | (a, b) = 1$ . Le të jetë  $\omega \in \mathbb{N}$  ashtu që  $\omega | ab$ . Atëherë ekzistojnë dhe janë të vetëm  $u, v \in \mathbb{N}$  të tillë që  $u | a, v | b$  dhe  $\omega = u \cdot v$ .*

## NUMRAT E THJESHTË

**Përkufizimi 8.** *Numri i plotë më i madhë se 1 që nuk ka pjesëtues tjerë përveç numrit 1 dhe vetvetës quhet numër i thjeshtë.*

Pra, numrat 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 janë numra të thjeshtë.

**Përkufizimi 9.** Numri i plotë, jo i thjeshtë dhe më i madh se 1 quhet numër i përbërë.

Numri 1 nuk është as numër i thjeshtë e as numër i përbërë.

Le të përkujtojmë se numrat çift mund të paraqiten në formën  $a = 2k$  ku  $k \in \mathbb{Z}$  kurse numrat tek paraqiten në formën  $b = 2k + 1$  (ose  $b = 2k - 1$ ) ku  $k \in \mathbb{Z}$ .

Shtrohet pyetja. A ekziston formula e përgjithshme për të caktuar numrin e  $n$ -të të thjeshtë?

Përgjigja është se deri më tani nuk dihet një formulë e tillë dhe “mbase me gjasë një formulë e tillë është e pamundshme”. Ajo që mund të bëjmë është të gjejmë numrat e thjeshtë më të vegjël se numri i dhënë  $n$ . Për këtë e përdorim *Skemën e Eratostenit* (Eratosthenue 276 p.e.s – 194 p.e.s).

#### Skema e Eratostenit

Skema e Eratostenit është një metodë për të caktuar numrat e thjeshtë më të vegjël (ose baraz me numrin e dhënë  $n$ ). Kjo kryhet duke u bazuar në hapat vijues.

Hapi 1. Shkruajmë të gjithë numrat prej 1 deri në  $n$ .

Hapi 2. Eliminojmë numrin 1 (sepse nuk është numër i thjeshtë).

Hapi 3. Numri i parë i thjeshtë është numri 2. Të gjithë shumëfishët e numrit 2 eliminohen nga lista, pra eliminohen 4, 6, 8, 10,...

Hapi 4. Vazhdojmë (kthehemi) tek numri i parë i listës i cili as nuk është eliminuar e as nuk është vendosur në rreth, ky numër do të jetë i thjeshtë, kështu që eliminojmë të gjithë shumëfishat e atij numri.

**Shënim.** Disa shumëfisha mbase më parë mund të jenë eliminuar.

Hapi 5. Përsëritet hapi 4 gjersa çdo numër në listë të jetë i vendosur në rreth ose të jetë eliminuar.

Pas kryerjes së këtyre hapave, e numrat e thjeshtë më të vegjël ose baraz me  $n$  janë numrat e vendosur në rreth (numrat që nuk janë eliminuar).

Le të provojmë skemën e Eratostenit në shembullin vijues:

**Shembulli 4.** Të caktohen të gjithë numrat e thjeshtë më të vegjël ose baraz me 100.

#### Zgjidhja.

Le të shkruajmë numrat prej 1 deri në 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Zbatojmë hapat 1 – 5 të skemës së Eratostenit. Eliminojmë numrin 1.

Numri 2 është i thjeshtë. Le të i vendosim rrethin në të. I eliminojmë të gjithë shumëfishët e numrit 2. Vazhdojmë me 3 që është numër që nuk është as i vendosur në rreth e as i eliminuar. Numri 3 është i thjeshtë. E vendosim në rreth dhe eliminojmë të gjithë shumëfishët e tij. Ngjashëm veprojmë me numrat 5 dhe 7. Numri në radhë i thjeshtë është 11. E vendosim në rreth. Nëse provojmë të eliminojmë shumëfishët e numrit 11 do të shohim se të gjithë tashmë janë eliminuar. E njëjta vlenë për të gjithë numrat e mbetur.

Pra, numrat e thjeshtë më të vegjël se 100 janë

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Shtrohet pyetja:

A është i fundëm apo i pafundëm numri i numrave të thjeshtë?

Përgjigjen e ka dhënë Euklidi, para mijëra vitesh.

**Teorema 9 (Teorema e Euklidit)** Ekzistojnë pafundësisht shumë numra të thjeshtë.

Para se të vërtetojmë këtë teoremë do të paraqesim dy pohime ndihmëse:

**Pohimi 5.** Numri i plotë  $n \geq 2$  është i përbërë, atëherë dhe vetëm atëherë nëse ekzistojnë numrat e plotë  $a, b$  të tillë që  $n = a \cdot b, 1 < a < n, 1 < b < n$ .

**Pohimi 6.** Nëse  $n > 1$ , ekziston numri i thjeshtë  $p$  i tillë që  $p | n$ .

Le të vërtetojmë në vijim teoremën e Euklidit.

Supozojmë të kundërtën, pra se bashkësia e numrave të thjeshtë është e fundme. Le të jetë ajo

$$P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_n\}$$

Le të jetë  $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ , pra numrat e bashkësisë  $P$  janë shumëzuar mes veti, dhe prodhimit të tyre i është shtuar numri 1.

Të kujtojmë se prodhimi i tillë është i mundshëm, sepse kemi të bëjmë me bashkësi të fundme numrash.

Në bashkësinë e pafundme të numrave nuk do të mund të kryenim shumëzimin në mënyrën e mësipërme.

Është e qartë se numri  $N$  është më i madh se secili prej numrave  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ , pra  $N$  është i ndryshëm prej të gjithëve.

Meqë bashkësia  $P$  është bashkësia e të gjithë numrave të thjeshtë, atëherë numri  $N$  nuk mund të jetë i thjeshtë.

Pra, mbetet që numri  $N$  të jetë numër i përbërë.

D.m.th.  $N$  ka faktorë të thjeshtë. Ky faktor i thjeshtë duhet të jetë element i bashkësisë  $P$ , pra duhet të jetë njëri nga elementet  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Le të themi se  $p_i$  është faktori i thjeshtë i numrit  $N$ . Por kjo paraqet kontradikcion sepse  $N$  nuk plotëpjesëtohet me  $p_i$ .

Një pyetje që ende vazhdon të kërkojë përgjigje është nëse numrat

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1$$

janë kryesisht të thjeshtë ose të përbërë:

P.sh. numrat

$$2 \cdot 3 + 1 = 7, 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$$

janë numra të thjeshtë por numri

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$$

është i përbërë.

Vërtetojmë tani pohimin vijues.

**Pohimi 7.** Çdo numër i përbërë  $n$  ka faktor të thjeshtë  $p > 1$ , i cili është më i vogël ose baraz me  $\sqrt{n}$ .

**Vërtetimi.**

Numri  $n$  mund të shkruhet në trajtën  $n = p_1 \cdot p_2$ . Supozojmë të kundërtën, pra se  $p_1 > \sqrt{n}$  dhe  $p_2 > \sqrt{n}$ . Atëherë

$$n = p_1 \cdot p_2 > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$$

që është kontradiksion.

Pra, së paku njëri nga faktorët  $p_1, p_2$  është më i vogël se  $\sqrt{n}$ .

Me fjalë të tjera nëse  $n$  nuk ka faktor të thjeshtë më të vegjël ose baraz me  $\sqrt{n}$  atëherë  $n$  është i thjeshtë.

**Shembulli 5.** Të caktohet numri  $p$ , nëse dihet se numrat  $p, p+2, p+4$  janë numra të thjeshtë.

**Zgjidhja.**

Meqë numrat  $p, p+1, p+2$  janë tre numra të njëpasnjëshëm, mbetet që njëri prej tyre të plotpjesëtohet me 3.

Sikur  $p+1$  të plotpjesëtohet me 3 atëherë  $p+4 = (p+1)+3$  plotpjesëtohet me 3, pra nuk është numër i thjeshtë.

Sikur  $p+2$  të plotpjesëtohet me 3, atëherë ai nuk do të ishte i thjeshtë.

Mbetet që  $p$  të plotpjesëtohet me 3, e kjo është e mundur vetëm nëse  $p=3$ , sepse në të kundërtën  $p$  do të ishte numër i përbërë.

## TEOREMA FUNDAMENTALE NË ARITMETIKË

**Pohimi 8.** Nëse  $a|b \cdot c$  dhe  $(a,b)=1$  atëherë  $a|c$ .

**Pohimi 9. (Lema e Euklidit).** Nëse  $p$  është numër i thjeshtë dhe  $p|a \cdot b$ , atëherë  $p|a$  ose  $p|b$ .

**Rrjedhimi 2.** Le të jenë  $a_1, a_2, \dots, a_n$  numra të plotë të ndryshëm nga 0 dhe 1. Nëse  $p$  është numër i thjeshtë dhe  $p|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  atëherë  $p|a_m$  për ndonjë  $m, 1 \leq m \leq n$ .

**Rrjedhimi 3.** Nëse  $p_1, p_2, \dots, p_n$  janë numra të thjeshtë dhe  $p|p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$  atëherë  $p = p_i$  për ndonjë  $i, 1 \leq i \leq n-1$ .

**Teorema 10. (Teorema fundamentale në aritmetikë).** Çdo numër i plotë  $n > 1$  mund të shprehet në formën

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s,$$

për ndonjë numër të plotë  $s$ , ku  $p_i, i \in \{1, 2, \dots, s\}$  janë numra të thjeshtë, dhe kjo paraqitje është e vetme deri në renditjen e numrave të thjeshtë.

Për shembull numri 360 mund të paraqitet si vijon

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5. \quad (1)$$

Fakti se numri 360 mund të paraqitet edhe në format:

$$360 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$$

$$360 = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$$

e arsyeton atë që e cekëm se paraqitja është e vetme duke mos pasur parasysh renditjen.

Nëse i referohemi relacionit (1) atëherë numrin 360 mund ta paraqesim në trajtën  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ .

Në përgjithësi, nëse  $n > 1$  numri natyror  $n$  mund të paraqitet në trajtën:

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_s^{a_s}, \quad (2)$$

për  $s \geq 1$ , ku  $p_1 < p_2 < \dots < p_s$  dhe  $a_i \geq 1, \forall i \in \mathbb{N}$ .

Shprehja (2) mund të paraqitet në trajtën:

$$n = \prod_{i=1}^s p_i^{a_i}.$$

**Pohimi 10.** Nëse zbërthimi kanonik i numrit  $a$  është  $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$  atëherë të gjithë pjesëtuesit e numrit  $a$  janë numrat  $d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$  ku  $\beta_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, k$  të tillë që  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, k$ .

**Shembulli 6.** Të caktohen pjesëtuesit e numrit 72.

**Zgjidhja.**

Meqë  $72 = 2^3 \cdot 3^2$  atëherë në bazë të pohimit 2, përfundojmë se pjesëtuesit e numrit 72 janë numrat  $d = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$ , ku  $0 \leq \beta_1 \leq 3$  dhe  $0 \leq \beta_2 \leq 2$ . Pra  $\beta_1 = 0, 1, 2, 3; \beta_2 = 0, 1, 2$ .

Për  $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, d = 2^0 \cdot 3^0 = 1$ .

Për  $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0, d = 2^1 \cdot 3^0 = 2$ .

Për  $\beta_1 = 2, \beta_2 = 0, d = 2^2 \cdot 3^0 = 4$ .

Për  $\beta_1 = 3, \beta_2 = 0, d = 2^3 \cdot 3^0 = 8$ .

Ngjashëm kryhen edhe njehsimet tjera.

Pra, pjesëtuesit e numrit 72 janë: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

**Shembulli 7.** Të caktohen të gjithë numrat natyror  $n$  për të cilët numri  $n^2 + 6n + 646$  është katror i një numri natyror.

**Zgjidhja.**

Le të  $n^2 + 6n + 646 = m^2$ . Atëherë  $n^2 + 6n + 9 + 637 = m^2$ . D.m.th.  $m^2 - (n+3)^2 = 637$ , përkatësisht  $(m-n-3) \cdot (m+n+3) = 91 \cdot 7$ .

Merret sistemi  $\begin{cases} m-n-3=7 \\ m+n+3=91 \end{cases}$ . Pse?

Duke mbledhur anë për anë të dy barazimet e sistemit të mësipërm merret  $m = 49$ . Pra  $(n+3)^2 = 49^2 - 637 \Rightarrow n = 39$ .

Përfundojmë se  $n = 39$  është numri i vetëm natyror për të cilin shprehja  $n^2 + 6n + 646$  është katror i një numri natyror.

**Shembulli 8.** Le të jetë  $\tau(n)$  numri i pjesëtuesve të numrit  $n$  (këtu përfshihen edhe 1 dhe  $n$ ). Të caktohet numri më i vogël natyror  $n$  për të cilin vlen  $\tau(n) = \tau(2004)$ .

**Zgjidhja.**

Së pari do të paraqesim disa sqarime. Le të shqyrtojmë për shembull numrin 24. Provohet lehtë se pjesëtuesit e numrit 24 janë: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Pra  $\tau(24) = 8$ . Nëse shqyrtojmë numrin 30, atëherë pjesëtuesit e numrit 30 janë 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Pra  $\tau(30) = 8$ .

Pra, vërejmë se  $\tau(24) = \tau(30) = 8$ , por 24 është më i vogël se 30. D.m.th. 24 është numri më i vogël natyror  $n$  i tillë që  $\tau(n) = 8$ .

Por për të përcaktuar numrin e pjesëtuesve të "numrave të mëdhenjë" nuk është detyrë e lehtë.

Në vijim do të shohim një metodë për të përcaktuar numrin e pjesëtuesve të numrit të dhënë.

Përkujtojmë se çdo numër natyror  $n$ , mund të shkruhet në mënyrë të vetme në formën  $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$ , ku  $p_1, p_2, \dots, p_s$  janë numra të thjeshtë të ndryshëm mes veti, kurse  $k_1, k_2, \dots, k_s$  janë numra natyror.

P.sh.  $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ ;  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ .

Kështu nëse  $p$  është numër i thjeshtë atëherë pjesëtuesit e numrit  $p^k, k \in \mathbb{N}$  janë:  $1, p, p^2, \dots, p^{k-1}, p^k$ , pra gjithsejtë janë  $k+1$  pjesëtues të numrit  $p^k$ . D.m.th.  $\tau(p^k) = k+1$ .

Atëherë meqë  $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$  do të kemi

$$\tau(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_s + 1).$$

Tani meqë  $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$  kemi

$$\tau(2004) = (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$$

D.m.th. numri 2004 ka gjithsejtë 12 pjesëtues. Detyra e jonë është që të caktojmë numrin më të vogël natyror që ka 12 pjesëtues, pra që  $\tau(n) = 12$ .

Meqë  $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 2$  atëherë numrat që kanë 12 pjesëtues janë të trajtave vijuese:

$$p^{11}, pq^5, p^2q^3, p^3q^2, p^5q, pqr^2, p^2qr, pq^2r. \text{ Pse?}$$

Numrat më të vegjël të këtyre trajtave janë:

$$2^{11}, 2 \cdot 3^5, 2^2 \cdot 3^3, 2^3 \cdot 3^2, 2^5 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3^2 \cdot 5, \text{ përkatësisht} \\ 2048, 486, 108, 72, 96, 150, 60, 90.$$

Përfundojmë se numri më i vogël natyror me 12 pjesëtues qenka numri 60.

**Shembulli 9.** *Le të jenë dhënë numrat  $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{2003}, 2^{2004}$ . A mund të ndahen këta numra në dy bashkësi pa elemente të përbashkëta, ashtu që shuma e numrave në njërin bashkësi të jetë e barabartë me shumën e numrave në bashkësinë tjetër?*

### Zgjidhja.

Supozojmë se një ndarje e tillë e numrave të dhënë është e mundur.

Le të shënojmë me  $S$  shumën e elementeve në cilëndo bashkësi ( $S$  do të jetë edhe shuma e elementeve të bashkësisë tjetër).

Qartë se  $S$  është numër çift sepse fitohet si shumë e numrave çift (secili nga numrat  $2^n, n \in 1, 2, \dots, 2004$  është çift).

Në anën tjetër  $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2004}$ .

D.m.th.  $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2003}$ .

Pra,  $S$  na paraqitet të jetë numër tek. Pse? Por, më sipër pamë se  $S$  është numër çift. Pra, kemi arritur në kontradiksion. D.m.th. supozimi ynë qenka i gabuar. Me fjalë të tjera, numrat e dhënë nuk mund të ndahen në dy bashkësi me vetinë që të kenë shumën e njëjtë.

**Shembulli 10.** Të vërtetohet se numri i plotë i trajtës  $4k + 2$  nuk mund të jetë katror i një numri të plotë. Pastaj të tregohet se shuma e katrorëve të dy numrave tek nuk mund të jetë katror i një numri të plotë.

### Zgjidhja.

Tregojmë së pari pjesën e parë të detyrës të cilën do ta zgjidhim me dy mënyra.

*Mënyra e parë.* Është e qartë se numri  $4k + 2$  nuk mund të jetë katror i një numri të plotë tek sepse  $4k + 2$  është numër çift kurse katrori i një numri të plotë tek është numër tek.

Le të tregojmë se  $4k + 2$  nuk mund të jetë as katror i një numri të plotë çift.

Supozojmë të kundërtën, pra se  $4k + 2 = (2s)^2$ ,  $s \in \mathbb{Z}$ .

Atëherë  $4k + 2 = 4s^2 \Rightarrow 2 = 4(s^2 - k) \Rightarrow \frac{1}{2} = s^2 - k$ , gjë që nuk është e mundur sepse në anën e majtë kemi numër të rregullt racional e në anën e djathtë kemi numër të plotë.

Pra, supozimi ynë qenka i gabuar. Përfundojmë se  $4k + 2$  nuk mund të jetë katror i një numri të plotë çift.

*Mënyra e dytë.* Për  $n$  - çift, pra nëse  $n = 2k$  atëherë  $n^2 = 4k^2$ .

Nëse  $n$  - tek, pra nëse  $n = 2k + 1$  atëherë  $n^2 = 4k(k + 1) + 1$ .

Pra, kur katrori i një numri  $n$  pjesëtohet me 4 jep mbetjen 0 (nëse  $n$  - çift) dhe 1 (nëse  $n$  - tek) (e asesi 2 si në rastin  $4k + 2$ ), pra  $4k + 2$  nuk mund të jetë katror i një numri të plotë.

Vërtetojmë tani pjesën tjetër të detyrës.

Le të jenë  $m_1 = 2s_1 + 1$ ,  $m_2 = 2s_2 + 1$ ,  $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$  dy numra tek.

Atëherë  $m_1^2 + m_2^2 = (2s_1 + 1)^2 + (2s_2 + 1)^2 = 4(s_1^2 + s_2^2 + s_1 + s_2) + 2 = 4k + 2$ ,  
ku  $k = s_1^2 + s_2^2 + s_1 + s_2$ .

Në pjesën e parë të detyrës pamë se  $4k + 2$  nuk mund të jetë katror i një numri të plotë e me këtë as  $m_1^2 + m_2^2$  nuk mund të jetë katror i një numri të plotë, gjë që kompletton vërtetimin.

**Shembulli 11.** Të zgjidhet në bashkësinë e numrave natyrorë barazimi

$$x^2 + y^2 = 2004.$$

**Zgjidhja.**

Së pari është e qartë se numrat  $x, y$  janë njëkohësisht çift ose tek. Pse? Le të shqyrtojmë ndaras rastet:

1) Numrat  $x, y$  janë numra tek. D.m.th.  $x = 2k + 1, y = 2l + 1$ , ku  $k, l \in \mathbb{N}$ .

Atëherë  $x^2 + y^2 = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 2004$

$$\Leftrightarrow 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 2004 \Leftrightarrow 4(k^2 + k + l^2 + l) = 2002$$

$$\Leftrightarrow 2(k^2 + k + l^2 + l) = 1001,$$

gjë që nuk është e mundur sepse në anën e majtë kemi numër çift e në anën e djathtë numër tek.

2) Le të jenë  $x, y$  numra çift. D.m.th.  $x = 2k, y = 2l, k, l \in \mathbb{N}$ . Atëherë  $x^2 + y^2 = 4k^2 + 4l^2 = 2004 \Rightarrow k^2 + l^2 = 501$ . Meqë në anën e djathtë kemi numër tek mbetet që njëri nga numrat  $k, l$  të jetë çift e tjetri tek. P.sh. le të jetë  $k$  numër çift kurse  $l$  numër tek. Pra, ata mund të paraqiten në trajtat  $k = 2k_1, l = 2l_1 + 1$ , ku  $k_1, l_1 \in \mathbb{N}$ .

Atëherë  $k^2 + l^2 = (2k_1)^2 + (2l_1 + 1)^2 = 501$ .

D.m.th.  $4k_1^2 + 4l_1^2 + 4l_1 + 1 = 501 \Leftrightarrow 4(k_1^2 + l_1^2 + l_1) = 500$

$$\Leftrightarrow k_1^2 + l_1^2 + l_1 = 125. \quad (1)$$

Vërejmë se  $l_1 \in \{1, 2, \dots, 10\}$ . Pse?

Provojmë p.sh. për  $l_1 = 10$ . Kemi  $k_1^2 + 100 + 10 = 125 \Rightarrow k_1^2 = 15$ . Ky barazim nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave natyrorë.

Nëse  $l_1 = 9$  atëherë  $k_1^2 + 81 + 9 = 125 \Rightarrow k_1^2 = 35$ . Edhe në këtë rast barazimi nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave natyrorë.

Nxënësi lehtë mund të tregojë se as në rastet  $l \in \{1, 2, \dots, 8\}$  barazimi nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave natyrorë sipas ndryshores  $k$ . Përfundojmë se nuk ekzistojnë numrat natyrorë  $k_1, l_1$  për të cilët vlen relacioni (1).

Nga shqyrtimet e bëra në rastet 1) dhe 2) përfundojmë se barazimi  $x^2 + y^2 = 2004$  nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave natyrorë.

**Shembulli 12.** Nëse  $n$  është numër natyror, atëherë  $n(2n+7)(7n+1)$  plotpjesëtohet me 6. Vërtetoni.

**Zgjidhja.**

Tregojmë se pari se numri  $n(2n+7)(7n+1)$  plotpjesëtohet me 2.

Numri  $n$  mund të shkruhet në njërin nga trajtat: 1)  $n = 2k$ , 2)  $n = 2k + 1$ .

1) Nëse  $n = 2k$  kemi  $2k(2 \cdot 2k + 7)(7 \cdot 2k + 1) = 2k(4k + 7)(14k + 1)$ , numër ky i plotpjesëtueshëm me 2.

2) Nëse  $n = 2k + 1$  kemi  $(2k + 1)(2(2k + 1) + 7)(7(2k + 1) + 1)$   
 $= (2k + 1)(4k + 2 + 7)(14k + 8)$   
 $= 2(2k + 1)(4k + 9)(7k + 4)$ ,

numër ky i plotpjesëtueshëm me 2.

Pra, në të dy rastet numri  $n(2n+7)(7n+1)$  plotpjesëtohet me 2.

Tregojmë tani se numri  $n(2n+7)(7n+1)$  plotpjesëtohet me 3.

Do të shqyrtojmë rastet: 1)  $n = 3k$ , 2)  $n = 3k + 1$ , 3)  $n = 3k + 2$ .

1) Nëse  $n = 3k$  kemi  $3k(2 \cdot 3k + 7)(7 \cdot 3k + 1) = 3k(6k + 7)(21k + 1)$ , numër ky i plotpjesëtueshëm me 3.

2) Nëse  $n = 3k + 1$  kemi  
 $(3k + 1)(2(3k + 1) + 7)(7(3k + 1) + 1) = 3(3k + 1)(2k + 3)(21k + 18)$ ,

numër ky i plotpjesëtueshëm me 3.

3) Nëse  $n = 3k + 2$  kemi  
 $(3k + 2)(2(3k + 2) + 7)(7(3k + 2) + 1) = 3(3k + 2)(6k + 1)(7k + 5)$ ,

numër ky i plotpjesëtueshëm me 3.

Pra, numri  $n(2n+7)(7n+1)$  plotpjesëtohet me 2 dhe me 3, pra ai plotpjesëtohet edhe me 6.

**Shembulli 13.** Të zgjidhet në bashkësinë e numrave natyrorë barazimi

$$2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28.$$

**Zgjidhja.**

$$2x^2 - 3xy + 8xy - 12y^2 = 28$$

$$(2x + 3y)(x + 4y) = 28.$$

Meqë  $x + 4y$  është faktor i numrit 28 dhe meqë  $x + 4y \geq 5$ , mbeten mundësitë:

$$\begin{cases} x + 4y = 7 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 4y = 14 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 4y = 28 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

Pas shqyrtimit të rasteve përfundojmë se zgjidhja është  $(8, 5)$ .

**Shembulli 14.** Të caktohet numri më i vogël natyror  $n$  për të cilin vlera e shprehjes

$$\frac{\sqrt{2004} + \sqrt{n}}{\sqrt{2004} - \sqrt{n}}$$

është numër natyror.

**Zgjidhja.**

Shprehjen e dhënë e shkruajmë në trajtën

$$\frac{\sqrt{2004} + \sqrt{n}}{\sqrt{2004} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{2004}{n}} + 1}{\sqrt{\frac{2004}{n}} - 1} = \frac{k+1}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1},$$

ku me  $k$  kemi zëvendësuar shprehjen  $\sqrt{\frac{2004}{n}}$ .

Meqë numri i dhënë duhet të jetë natyror mbetet që  $k-1 \in \{1, 2\}$ , d.m.th.  $k \in \{2, 3\}$ .

Për  $k = 2$ , kemi

$$\frac{\sqrt{\frac{2004}{n}} + 1}{\sqrt{\frac{2004}{n}} - 1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2004}{n}} + 1 = 3 \left( \sqrt{\frac{2004}{n}} - 1 \right) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2004}{n}} = 2.$$

Nga relacioni i fundit merret  $n = 501$ .

Tregoni se për  $k = 3$  merret që  $n$  nuk është numër natyror.

Përfundojmë se  $n = 501$  është numri më i vogël natyror për të cilin  $\frac{\sqrt{2004} + \sqrt{n}}{\sqrt{2004} - \sqrt{n}}$  është numër natyror.

**Shembulli 15.** Të vërtetohet se shifra e fundit e numrit  $2^n, n \in \mathbb{N}$  nuk mund të jetë zero.

**Zgjidhja.**

Supozojmë se për ndonjë  $n \in \mathbb{N}$ , shifra e fundit e numrit  $2^n$  është zero. Atëherë numri  $2^n$  plotëpjestohet me 10, d.m.th. ekziston numri i plotë pozitiv  $k$  i tillë që  $2^n = 10 \cdot k$ .

Pra  $2^n = 2 \cdot 5 \cdot k$ , prej nga rrjedh që  $2^{n-1} = 5 \cdot k$ .

Vërejmë se  $k$  duhet të jetë numër çift. Pse? Le të jetë  $k = 2 \cdot k_1$ .

Atëherë  $2^{n-1} = 5 \cdot 2 \cdot k_1$ , d.m.th.  $2^{n-2} = 5 \cdot k_1$ . Ngjashëm si më sipër konkludojmë se  $k_1$  duhet të jetë numër çift dhe me këtë rast merret  $2^{n-3} = 5 \cdot k_2$ .

Duke vazhduar këtë proces merret  $2^{n-n} = 2^0 = 1 = 5 \cdot k_{n-1}$ , ku  $k_{n-1}$  është numër i plotë pozitiv, gjë që nuk është e mundur. Pse? Përfundojmë se shifra e fundit e numrit  $2^n$  për asnjë  $n \in \mathbb{N}$  nuk mund të jetë 0.

**Shembulli 16.** Të vërtetohet se numri  $3n + 2, n \in \mathbb{N}$  nuk mund të jetë katror i një numri të plotë.

**Zgjidhja.**

*Shënim.* Duhet të tregojmë se nuk ekziston numri i plotë pozitiv  $m$  i tillë që  $m^2 = 3n + 2$ . D.m.th. duhet të tregojmë se kur katrori i numrit natyror  $m$  (pra kur  $m^2$ ) pjesëtohet me 3 asnjëherë nuk e jep mbetjen 2.

Rikujtojmë faktin se çdo numër natyror  $n$  mund të shprehet në një nga format:  $3k, 3k + 1, 3k + 2, k \in \mathbb{N}$ .

- 1) Nëse  $m = 3k$  atëherë  $m^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$ .
- 2) Nëse  $m = 3k + 1$  atëherë  $m^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ .
- 3) Nëse  $m = 3k + 2$  atëherë

$$m^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1.$$

Pra, vërejmë se katrori i numrit natyror gjatë pjesëtimit me 3 jep mbetjen 0 (rasti 1) ose 1 (rastet 2, 3) e asnjëherë 2, gjë që kompletion vërtetimin.

**Shembulli 17.** *Trekëndëshi kënddrejtë, gjatësitë e brinjëve të të cilit janë numra të plotë quhet trekëndësh i Pitagorës. Të vërtetohet se në trekëndëshin e Pitagorës gjatësia e së paku njëres brinjë plotpjesëtohet me 3.*

### Zgjidhja.

Supozojmë se asnjëra nga katetet  $a, b$  nuk plotpjesëtohet me 3.

Atëherë  $a, b$  janë të njëres nga format  $3k + 1, 3k + 2$ .

Dallojmë rastet:

$$1) \quad a = 3k + 1, b = 3k_1 + 1$$

$$2) \quad a = 3k + 1, b = 3k_1 + 2 \quad (a = 3k + 2, b = 3k_1 + 1)$$

$$3) \quad a = 3k + 2, b = 3k_1 + 2.$$

Shqyrtojmë ndaras rastet e mësipërme.

$$1) \quad a^2 + b^2 = (3k + 1)^2 + (3k_1 + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 + 9k_1^2 + 6k_1 + 1 \\ = 3(3k^2 + 2k + 3k_1^2 + 2k_1) + 2 = 3n + 2$$

ku  $n = 3k^2 + 2k + 3k_1^2 + 2k_1$ .

$$2) \quad a^2 + b^2 = (3k + 1)^2 + (3k_1 + 2)^2 = 9k^2 + 6k + 1 + 9k_1^2 + 12k_1 + 4 \\ = 3(3k^2 + 2k + 3k_1^2 + 4k_1 + 1) + 2 = 3n + 2$$

ku  $n = 3k^2 + 2k + 3k_1^2 + 4k_1 + 1$ .

$$3) \quad a^2 + b^2 = (3k + 2)^2 + (3k_1 + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 + 9k_1^2 + 12k_1 + 4 \\ = 3(3k^2 + 4k + 3k_1^2 + 4k_1 + 2) + 2 = 3n + 2.$$

ku  $n = 3k^2 + 4k + 3k_1^2 + 4k_1 + 2$ .

Por dijmë se  $c^2 = a^2 + b^2$ . D.m.th. në të tri rastet morëm që  $c^2 = 3n + 2$ . Në shembullin paraprak treguam se katrori i asnjë numri natyror nuk mund të jetë i trajtës  $3n + 2$ .

Pra, së paku njëri nga numrat  $a, b$  duhet të plotpjesëtohet me 3.