V. STRUKTURAT ALGJEBRIKE

1. VEPRIMET BINARE

Përkufizim. Le të jetë G bashkësi e çfarëdoshme, jo boshe. ***Veprim binar*** në bashkësinë G është funksioni që çdo dysheje të renditur nga bashkësia $G \times G$ i shoqëron një element nga G.

D.m.th. një veprim binar në G, çdo çifti të renditur $(a,b) \in G \times G$ i shoqëron një element $c \in G$.

Poashtu mund të themi se veprimi binar në G paraqet një formulë sipas së cilës dyshet e renditura (a,b) nga $G \times G$ kombinohen për të dhënë një anëtar të ri i cili është po ashtu nga G.

Ky kusht quhet ***mbylltësia***.

Shembuj të veprimeve binare.

Shembulli 1. Mbledhja e zakonshme në bashkësinë e numrave natyrorë është veprim binar sepse

$$\forall a,b \in N,\ a+b \in N.$$

Shembulli 2. Mbledhja e zakonshme në bashkësinë e numrave të plotë është veprim binar sepse

$$\forall a,b \in Z,\ a+b \in Z.$$

Shembulli 3. Shumëzimi i zakonshëm në bashkësinë e numrave racionalë është veprim binar sepse

$$\forall a,b \in Q,\ a \cdot b \in Q.$$

Shembulli 4. Zbritja e zakonshme në bashkësinë e numrave realë është veprim binar sepse

$$\forall a,b \in R,\ a-b \in R.$$

Në rastet e mësipërme pamë veprimet binare në një bashkësi. Le të shohim në vazhdim se disa veprime nuk janë binare në bashkësi të caktuara.

Shembulli 5. Zbritja nuk është veprim binar në bashkësinë e numrave natyrorë, sepse relacioni

$$\forall a,b \in N,\ a-b \in N$$

nuk është çdo herë i saktë.

P.sh. nëse $a=3, b=5, a-b=3-5=-2 \notin N.$

Shembulli 6. Pjesëtimi nuk është veprim binar në bashkësinë e numrave të plotë, sepse nuk plotësohet çdo herë mbylltësia.

p.sh. $3, 4 \in Z$ por $\frac{3}{4} \notin Z$.

2. GRUPET. SHEMBUJ TË GRUPEVE

Para se të japim përkufizimin e grupit le të shqyrtojmë shembullin vijues.

Shembulli 7. Është dhënë bashkësia $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Tregoni se "*mbledhja sipas modulit* 5" është veprim binar në Z_5.

Zgjidhja.

Duhet të tregojmë se kur të mbledhim çdo dy numra nga Z_5 sipas modulit 5, rezultati prapë është në Z_5.

P.sh. $3 + 4 = 7$. Por meqë kemi mbledhjen sipas modulit 5 dhe meqë $7 = 2$ (mod 5) kemi $3 + 4 = 2$ (modulo 5).

Tabela vijuese është *tabela e mbledhjes sipas modulit* 5.

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Nga tabela vërejmë se "*mbledhja sipas modulit* 5" është veprim binar në Z_5 sepse çdo çifti të renditur nga Z_5 i shoqëron një element nga Z_5.

D.m.th.

$$\forall\, a, b \in Z_5, a + b \in Z_5.$$

Nëse e analizojmë tabelën e mësipërme vërejmë edhe veti të tjera që plotëson bashkësia Z_5 në lidhje me mbledhjen sipas modulit 5.

P.sh. vërejmë se:

$(1 + 2) + 3 = 3 + 3 = 1;\;\; 1 + (2 + 3) = 1 + 0 = 1$

Pra $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)$.

Poashtu, $(2+4)+3=1+3=4,\ 2+(4+3)=2+2=4.$

D.m.th. $(2+4)+3=2+(4+3).$

Pasi, t'i kemi provuar edhe rastet e tjera përfundojmë se

$$\forall\, a,b,c\in Z_5,(a+b)+c=a+(b+c).$$

Në këtë rast themi se veprimi binar (në rastin tonë, mbledhja sipas modulit 5) është ***asociativ*** (***shoqërues***), ose themi se në bashkësinë Z_5 vlen ***vetia asociative*** (***vetia e shoqërimit***).

Tabela e mësipërme nxjerr në pah edhe disa veti të tjera.

Vërejmë se:

$0+0=0,\ 1+0=0+1=1, 2+0=0+2=2, 3+0=0+3=3, 4+0=0+4=4.$

Pra, në bashkësinë Z_5 ekziston një element (e ky është 0) ashtu që:

$$\forall a\in Z_5,\ a+0=0+a=a.$$

Në këtë rast elementi 0 quhet ***element njësi***.

Nga tabela, po ashtu vërejmë se:

$0+0=0,\ 1+4=0, 2+3=0, 3+2=0, 4+1=0.$

D.m.th. për çdo element $a\in Z_5$, ekziston elementi $a'\in Z_5$ ashtu që shuma e a dhe a' të jap si rezultat elementin njësi. Në rastin tonë:

$(\forall a\in Z_5)(\exists a'\in Z_5)\ a+a'=a'+a=0.$

Elementi a' quhet ***invers i elementit*** a.

Nga tabela vërejmë se $\forall a,b\in Z_5,\ a+b=b+a.$

Në këtë rast themi se në Z_5 vlen ***vetia komutative*** (***vetia e përkëmbimit***)

Le të përmbledhim vetitë e mësipërme:

1. Për çdo $a,b\in Z_5$ vlen:

$$a+b\in Z_5.$$

2. Për çdo $a,b,c\in Z_5$ vlen

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

3. Ekziston $0\in Z_5$ ashtu që për çdo $a\in Z_5$ të vlejë

$$a+0=0+a=a.$$

4. Për çdo $a\in Z_5$, ekziston $a'\in Z_5$ ashtu që

$$a+a'=a'+a=0.$$

5. Për çdo $a,b \in Z_5$

$$a+b=b+a.$$

Vetitë 1-4 i plotësojnë shumë bashkësi në lidhje me veprime të ndryshme binare sa që për to është rezervuar një emërtim të cilin po e paraqesim me përkufizimin vijues:

Përkufizim. Bashkësia G, së bashku me veprimin *, themi se formon ***grup***, të cilin e shënojmë me $(G,*)$ nëse plotësohen vetitë:

1. ***Mbylltësia.*** Për çdo $a,b \in G$ vlen:

$$a*b \in G.$$

2. ***Asociativiteti*** (***vetia asociative***). Për çdo $a,b,c \in Z_5$ vlen

$$(a*b)*c = a*(b*c).$$

3. ***Elementi njësi***. Ekziston $e \in G$ ashtu që për çdo $a \in G$ vlen

$$a*e=e*a=a.$$

4. ***Elementi invers.*** Për çdo $a \in G$, ekziston $a' \in G$ ashtu që vlen

$$a*a'=a'*a=e.$$

Nëse grupi G e plotëson vetinë vijuese:

5. ***Vetia komutative*** (***vetia e përkëmbimit***). Për çdo $a,b \in G$

$$a*b=b*a$$

themi se grupi G është ***grup Abelian*** (***komutativ***).

Shënim: Në vijim, për çfarëdo elemente të grupit, në vend të shënimit $a*b$ do të shënojmë ab.

Shembuj të grupeve.

Shembulli 8. Tregoni se $(Z,+)$ është grup abelian.

Shembulli 9. Tregoni se $(Q,+)$ është grup abelian.

Shembulli 10. Tregoni se $(R,+)$ është grup abelian.

Në shembujt 8-10, vëreni se elementi njësi është $e=0$ kurse për çdo element a elementi invers është $a'=-a$.

Shembulli 11. Tregoni se $(Q,\cdot)$ nuk është grup. Cila nga vetitë 1-4 nuk plotësohet?

Shembulli 12. Tregoni se $(R,\cdot)$ nuk është grup. Cila nga vetitë 1-4 nuk plotësohet?

Shembulli 13. Tregoni se $(Q\setminus\{0\},\cdot)$ është grup abelian.

Shembulli 14. Tregoni se $(R\setminus\{0\},\cdot)$ është grup abelian.

Shembulli 15. Tregoni se $(Q^{+},\cdot)$ është grup abelian.

Shembulli 16. Tregoni se $(R^{+},\cdot)$ është grup abelian.

Në shembujt 13-16, vëreni se elementi njësi është $e=1$ kurse për çdo element a elementi invers është $a'=a^{-1}=\dfrac{1}{a}$.

Shembulli 17. Tregoni se $(Z\setminus\{0\},\cdot)$ nuk është grup.

Shembulli 18. A paraqet grup (abelian) $(A,\circ)$ nëse $A=\{a,b,c\}$ kurse veprimi binar $"\circ"$ është përkufizuar me tabelën.

$\circ$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a}$	c	a	b
$\boldsymbol{b}$	a	b	c
$\boldsymbol{c}$	b	c	a

Zgjidhja.

Provojmë vetitë 1-5.

1. ***Mbylltësia***.

Meqë në brendi të tabelës paraqiten vetëm elementet e bashkësisë A, do të thotë se veprimi është i mbyllur.

2. ***Vetia asociative***.

Duhet të provojmë se vlejnë:

$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$, $(a\circ c)\circ b=a\circ(c\circ b)$

$(b\circ a)\circ c=b\circ(a\circ c)$, $(b\circ c)\circ a=b\circ(c\circ a)$

$(c\circ a)\circ b=c\circ(a\circ b)$, $(c\circ b)\circ a=c\circ(b\circ a)$.

Le të provojmë p.sh. rastin e parë:

$(a\circ b)\circ c=a\circ c=b$

$a\circ(b\circ c)=a\circ c=b.$

Pra vërtetë, $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$.

Ngjashëm provohen rastet e tjera.

3. ***Elementi njësi***.

Meqë

$a \circ b = b \circ a = a,\ b \circ b = b,\ c \circ b = b \circ c = c$

Përfundojmë se elementi njësi është b. (Pra b e luan rolin e e -së).

4. ***Elementi invers***.

Meqë $a \circ c = b, b \circ b = b, c \circ a = b$

Përfundojmë se çdo element nga bashkësia A e ka inversin e vet. (Kështu inversi i elementit a është elementi c, inversi i elementit b është elementi b, inversi i elementit c është elementi a).

5. ***Vetia komutative***.

Meqë për çdo $x, y \in A$ vlen

$$x \circ y = y \circ x$$

atëherë themi se plotësohet vetia komutative.

Meqë plotësohen kushtet 1-5 përfundojmë se $(A, \circ)$ paraqet grup abelian.

Shembulli 19. Le të shqyrtojmë bashkësinë $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ në lidhje me shumëzimin sipas modulit 4. A është $(Z_4, \cdot)$ grup?

Zgjidhja.

Në fillim po e kontruktojmë tabelën e shumëzimit sipas modulit 4 për bashkësinë Z_4.

$\cdot$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Provojmë në vijim nëse plotësohen vetitë e grupit.

1. ***Mbylltësia***. Nga tabela vërejmë se vlen mbylltësia sepse

$$\forall a, b \in Z_4,\ a \cdot b \in Z_4.$$

2. ***Vetia asociative***. Provoni!

3. ***Elementi njësi*** është 1.

4. ***Elementi invers***. Vërejmë se disa elemente nga bashkësia Z_4 nuk kanë elementin invers. P.sh. 0 dhe 2 nuk kanë elementin invers.

Pra, $(Z_4, \cdot)$ nuk është grup.

Shembulli 20. Janë dhënë pasqyrimet:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tregoni se bashkësia $S = \{f_1, f_2, f_3\}$ është grup në lidhje me kompozimin e pasqyrimeve.

Zgjidhja.

1. ***Mbylltësia***.

Duhet të tregojmë se $\forall f_i, f_j \in S, f_i \circ f_j \in S.$

P.sh. $f_1 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f_2 \in S.$

Pra $f_1 \circ f_2 = f_2$.

Duke vepruar ngjashëm edhe në rastet e tjera vërtetojmë se veprimi është i mbyllur.

Duke njehsuar edhe rastet e tjera $f_i \circ f_j, i, j \in \{1,2,3\}$ merret tabela vijuese.

$\circ$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

2. ***Vetia asociative*** vlen sepse vlen për kompozimin e pasqyrimeve.

3. ***Elementi njësi*** është f_1 sepse:

$$f_1 \circ f_1 = f_1,\ f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2 = f_2, f_3 \circ f_1 = f_1 \circ f_3 = f_3.$$

4. ***Elementi invers***. Secili element nga bashkësia S ka inversin e vet.

f_1 ka invers f_1 sepse $f_1 \circ f_1 = f_1$

f_2 ka invers f_3 sepse $f_2 \circ f_3 = f = f_3 \circ f_2$

Nga relacioni $f_2 \circ f_3 = f = f_3 \circ f_2$ vërejmë se f_3 ka invers f_2 .

5. ***Vetia komutative***.

Nga tabela vërejmë se për çdo $f_i, f_j \in S$ vlen:

$$f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$$

Pra vlen vetia komutative.

Përfundojmë se $(S,\circ)$ është ***grup abelian***.

Shënim. Në rastin e përgjithshëm, për kompozimin e pasqyrimeve nuk vlen vetia komutative.

Në rastet e mësipërme, pamë se të gjitha grupet ishin komutative. Le të shohim në vijim një shembull të një grupi jokomutativ.

Shembulli 21. Për matricën e dhënë $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ numri $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ quhet ***determinanta e matricës*** A dhe shënohet $\det A$.

P.sh. determinanta e matricës $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ është

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-(-3)(-1)=5.$$

Le të jetë $M=\left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid ad-bc=1\right\}$, pra, kemi marrë bashkësinë e të gjitha matricave katrore të rendit të dytë, determinanta e të cilave është 1.

Veprimi binar le të jetë shumëzimi i matricave. Pra

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{bmatrix}.$$

Tregoni se $(M,\cdot)$ është grup por jo edhe grup abelian.

Zgjidhja.

1. ***Mbylltësia***.

Duhet të tregojmë se shumëzimi i dy matricave nga bashkësia M jep një matricë nga M.

Me fjalë të tjera, duhet të tregojmë se nëse shumëzojmë dy matrica që kanë determinantën 1 edhe matrica e fituar do të ketë determinantën 1. Kjo arrihet duke zbatuar vetitë e determinantave.

Le të jenë $A,B\in M$, d.m.th. $\det A=1, \det B=1.$ Atëherë

$\det A\cdot B=\det A\cdot\det B=1.$

Pra, meqë $\det A\cdot B=1$ përfundojmë se $A\cdot B\in M$.

2. ***Vetia asociative*** vlen sepse vlen për shumëzimin e matricave.

3. **Elementi njësi** është $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ sepse për çdo $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in M$ vlen:

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}.$$

Po ashtu $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in M$ sepse $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$

4. ***Elementi invers***. Provoni të tregoni se për çdo $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in M$, ekziston

$A^{-1}=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}\in M$ ashtu që

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=A^{-1}\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

5. ***Vetia komutative***. Le të jenë $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\in M.$

Atëherë $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}.$

Pra $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$

D.m.th. nuk vlen vetia komutative.

3. VETITË ELEMENTARE TË GRUPEVE

Në shembujt e mësipërm, pamë se çdo grup ka elementin njësi. Po ashtu pamë se çdo element i grupit ka invers.

Shtrohen pyetjet:

A është i vetëm elementi njësi, apo ka më tepër elemente njësi?

A është inversi i elementit i vetëm, apo elementi mund të ketë më tepër elemente inverse?

Shembujt na sugjerojnë se elementi njësi është i vetëm (se grupi ka ***vetëm një*** element njësi) dhe se elementi ka ***vetëm një*** element invers, kurse teoremat vijuese i konfirmojnë sugjerimet që na japin shembujt.

Teorema 1. Uniciteti i elementit njësi.

Në grupin *G*, ekziston vetëm një element njësi.

Vërtetim.

Supozojmë se grupi G ka dy elemente njësi, p.sh. e, e_1.

Atëherë:

1. $ae = ea = a$, për çdo $a \in G$.

2. $ae_1 = a$, për çdo $a \in G$.

Nëse 1. vlen për çdo *a* nga bashkësia G, vlen edhe për $a = e_1$. D.m.th. merret:

3. $e_1 e = ee_1 = e_1$.

Ngjashëm, kur në 2. merret $a = e$ kemi:

4. $ee_1 = e$.

Pra $ee_1 = e_1$ dhe $ee_1 = e$. D.m.th. $e = e_1$ ■

Teorema 2. Ligji i anulimit

Në grupin *G*, vlejnë ligji i djathtë dhe i majtë i anulimit, d.m.th.

$$ba = ca \Rightarrow b = c.$$

$$ab = ac \Rightarrow b = c.$$

Vërtetim.

Le të tregojmë p.sh. se vlen relacioni i parë.

Le të jetë $ba = ca$. Le të jetë a' inversi i elementit a.

Duke i shumëzuar të dy anët me a' merret

$$(ba)a' = (ca)a'.$$

Meqë vlen vetia asociative merret:

$$b(aa') = c(aa').$$

Pra,

$$be = ce.$$

D.m.th.

$$b = c.$$

Ngjashëm vërtetohet relacioni tjetër■

Meqë tek grupet vlen vetia e anulimit, në tabelën e Cayley-it për grupin, çdo element paraqitet vetëm një herë në çdo rresht dhe në çdo shtyllë.

Teorema 3. Uniciteti i inversit

Për çdo element a në grupin G, elementi invers është i vetëm.

Vërtetim.

Le të supozojmë se a_1, a_2 janë dy elemente inverse për elementin a. D.m.th.

$aa_1 = e$ dhe $a_1 a_2 = e$. Pra,

$$aa_1 = aa_2.$$

Në bazë të ligjit të anulimit kemi

$$a_1 = a_2.$$

Pra, përfundojmë për çdo element të grupit elementi invers është i vetëm ∎

Le të përmendim në fund disa shënime që përdoren tek grupet.

Nëse n është numër i plotë pozitiv, meqë vlen vetia asociative mund të shënojmë

$$g^n = \underbrace{g \cdot g \cdot \ldots \cdot g}_{n-\,faktorë}.$$

Definojmë $g^0 = e$.

Nëse n është numër i plotë negativ, merret:

$$g^n = (g^{-1})^{|n|}.$$

P.sh. $g^{-3} = (g^{-1})^3$.

Le të përkujtojmë se tek grupet abstrakte nuk mund të kemi shënimin $g^{\frac{1}{2}}$.

Kështu, fuqia e elementit të grupit duhet të jetë numër i plotë. Në këtë rast vlejnë disa nga vetitë e fuqive:

i) Për çdo $m, n \in Z, g^m \cdot g^n = g^{m+n}$. ii) Për çdo $m, n \in Z, (g^m)^n = g^{m \cdot n}$.

Por ka veti që vlejnë për numrat realë, e që nuk vlejnë në përgjithësi tek grupet.

P.sh. $(g_1 g_2)^n \neq g_1^n \cdot g_2^n$.

Duhet të jemi të kujdesshëm, gjatë përdorimit të shënimeve të mësipërme.

P.sh., nëse veprimi binar i grupit është mbledhja “+” shënimet e mësipërme duhet të “*përkthehen*” në “*shënimet e mbledhjes*”.

P.sh. inversi i elementit g do të shënohet $-g$.

Pastaj g^3 është $g + g + g$ dhe shënohet $3g$, si dhe në përgjithësi g^n shënohet si ng.

DETYRA PËR USHTRIME TË PAVARURA

1. Tregoni se shumëzimi i zakonshëm nuk është veprim binar në bashkësinë R.

2. Tregoni se shumëzimi i zakonshëm është veprim binar në bashkësinë $R\setminus\{0\}$.

3. Tregoni se $(Z_4,\cdot)$ nuk është grup, ku veprimi $"\cdot"$ është shumëzimi sipas modulit 4.

4. Tregoni se $(Z_7,+)$ është grup, ku veprimi $"+"$ është mbledhja sipas modulit 7.

5. Le të jetë $F=\{e, f_1\}$

$$F=\Big\{e(x)=x,\ f_1(x)=\frac{1}{x},\ f_2(x)=1-x,\ f_3(x)=\frac{x-1}{x},\ f_4(x)=\frac{x}{x-1},$$
$$f_5(x)=\frac{1}{1-x}, x\neq 0,1\Big\}.$$

Tregoni se $(F,\circ)$ është grup jokomutativ, ku veprimi $"\circ"$ është kompozimi i pasqyrimeve.

6. Le të jetë $2Z=\{0,\pm2,\pm4,...\}$ (bashkësia e numrave të plotë çift). A është $(2Z,+)$ grup?

7. A paraqet $(2Z,\cdot)$ grup?

8. Le të jetë $2Z+1=\{\pm1,\pm3,\pm5,..\}$ (bashkësia e numrave të plotë tek). A është $(2Z+1,+)$ grup?

9. A paraqet $(2Z+1,\cdot)$ grup?

Provoni a paraqet grup bashkësia:

10. $(A,+)$ nëse $A=\{-1,0,1\}$.

11. $(A,\cdot)$ nëse $A=\{-1,0,1\}$.

12. $(B,\cdot)$ nëse $B=\{-1,1\}$.

13. Tregoni se $\{1,2,3\}$ në lidhje me shumëzimin modulo 4 nuk është grup.

14. Tregoni se $\{1,2,3,4\}$ në lidhje me shumëzimin modulo 5 është grup.