ALGJEBRA
Drejtimi: Shkencë kompjuterike
Detyra për ushtrime të pavarura-pjesa e tretë

1. Të vërtetohet se në intervalin $(n, n+1)$ nuk ka asnjë numër të plotë.

2. Le të jenë n_1, n_2 numra natyror të tillë që $n_1 < n_2$. Të vërtetohet se në intervalin (n_1, n_2) ka $n_2 - n_1 - 1$ numra të plotë.

3. Le të jetë $n \in N$ i tillë që $n \neq k^2$, ku $k \in N$. Të vërtetohet se $\sqrt{n}$ është numër iracional.

4. Të vërtetohet se $\sqrt[m]{n}$ është numër iracional, ku $n \in N$ dhe $n \neq k^m$ për $k \in N$.

5. Le të jenë a, b, c numra të plotë të tillë që $a^6 + 2b^6 = 4c^6$. Tregoni që

$$a = b = c = 0.$$

6. Të caktohen të gjitha zgjidhjet e plota të barazimit $a^3 + 2b^3 = 4c^3$.

7. Të vërtetohet se barazimi $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ ka zgjidhje në bashkësinë e numrave të plotë vetëm kur $x = y = z = 0$.

8. A është e mundur që numrat $3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{2004}$ të ndahen në dy bashkësi pa elemente të përbashkëta në mënyrë që prodhimi i numrave në njërën bashkësi të jetë i barabartë me prodhimin e numrave në bashkësinë tjetër.

9. Vërtetoni ose mohoni:
Asnjë numër natyrorë që përmban shifra tek nuk mund të shprehet si ndryshim i katrorëve të dy numrave të njëpasnjëshëm natyror.

10. Të zgjidhet në bashkësinë e numrave natyrorë barazimi

$$x^2 + y^2 = 2005.$$

11. Le të jenë $x, y \in \mathbb{N}$. Të zgjidhet barazimi $x^2 + 2y^2 = 1200$.

12. Të zgjidhet barazimi $3x^2 + y^2 = 171$, ku $x, y \in \mathbb{N}$.

13. Tregoni se nëse d e pjesëton numrin m atëherë d e pjesëton edhe numrin $-m$.

14. Nëse d e pjesëton numrin $a+b$ dhe nëse d e pjesëton numrin a (ose numrin b) atëherë d e pjesëton edhe numrin b (ose numrin a). Tregoni.

15. Nëse për numrat e plotë a,b,c,m,n vlen $c\,|\,a$ dhe $c\,|\,b$ atëherë $c\,|\,(am+bn)$. Tregoni.

16. Tregoni se nëse $x\,|\,y$ dhe $y\,|\,z$ atëherë $x\,|\,z$, ku x,y,z janë numra të plotë.

17. Tregoni se n = 3 është i vetmi numër tek për të cilin $(n-1)\,|\,n^3+1$.

18. Nëse $3\,|\,ax+b$ tregoni se $3\,|\,(2ax^2+(a+2b)x+b)$.

19. Nëse $5\,|\,(n+2)$, i cili nga numrat e ardhshëm plotpjesëtohet me 5.

$a)$ n^2-4; $b)$ n^2+8n+7; $c)$ n^4-1; $d)$ n^2-2n.

20. Të vërtetohet se $\dfrac{(2m)!(3n)!}{(m!)^2(n!)^3}$ është numër i plotë.

21. Tregoni se për çdo $n\in N$, $(n!)!$ plotpjesëtohet me $n!^{(n-1)!}$.

22. Cili është numri më i madh i plotë pozitiv për të cilin

$$(n+10)\,|\,(n^3+100)\,?$$

23. A ekziston numri natyror n për të cilin shprehja $\dfrac{\sqrt[3]{2004}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{2004}-\sqrt[3]{n}}$ është numër natyror?

24. Le të jetë $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. P.sh. $5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$. Tregoni se për asnjë $m\in\mathbb{N}$ dhe asnjë $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 5$ barazimi $2^m=n!$ nuk ka zgjidhje.

25. Vërtetoni ose mohoni:

Për asnjë $n\in\mathbb{N}$ numri n^2+1 nuk plotpjesëtohet me 3.

26. Të vërtetohet se se n^k-1 plotpjesëtohet me $n-1$ nëse $n\geq 2, n,k\in\mathbb{N}$ dhe se n^k-1 plotpjesëtohet me $(n-1)^2$ atëherë dhe vetëm atëherë nëse k plotpjesëtohet me $n-1$.

27. Le të jetë $n\in\mathbb{N}$ dhe $d\,|\,2n^2$. A mund të jetë n^2+d katror i numrit të plotë?

28. Të vërtetohet se për asnjë numër natyror n numri

$$1^{1995}+2^{1005}+\ldots+n^{1995}$$

nuk plotpjesëtohet me $n+2$.

29. Tregoni se $\ln 2$ është numër iracional.

30. Le të jenë a,b numra të plotë të njëpasnjëshëm dhe n numër natyror. Të vërtetohet se $(an+b,bn+a)$ është numër tek.

31. Të vërtetohet se nga kushtet $(a,c)=1$ dhe $(b,c)=1$ rrjedh që

$$(ab,c)=1.$$

32. Tregoni se $\sqrt[n]{m}$ është numër iracional, nëse $m,n\in\mathbb{N}$ dhe m nuk është fuqi e $n-$të e asnjë numri natyror.

33. Të vërtetohet se $\sqrt[n]{n}$ nuk është numër racional.

34. Të vërtetohet se $\log_{10}2$ është numër iracional.

35. Nëse $(a,b_i)=1$ për $i=1,2,\ldots,n$ atëherë $(a,b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n)=1$.

36. Nëse $a\,|\,bc$ dhe $(a,b)=1$ atëherë $a\,|\,c$.

37. Nëse $a,b\in\mathbb{Z}$ të tillë që $(a,b)=1$ atëherë $(a^2+b^2,a+b)=1$ ose 2.

38. Nëse $(a,b)=1$ dhe $(a^3+b^3,a^2+b^2)=d$ atëherë $d\,|\,(a-b)$.

39. Nëse $(a,b)=1$ atëherë $(a+b,a^2-ab+b^2)=1$ ose 3.

40. Tregoni se $(a+b,a-b)\geq(a,b)$.

41. Nëse $a,b,n\in\mathbb{N}$ atëherë $(a^n,b^n)=(a,b)^n$.

42. Nëse $(a,b)=(a,c)$ atëherë $(a^2,b^2)=(a^2,c^2)$.

43. Nëse $a,b\in\mathbb{Z},(a,b)\neq(0,0),(a,b)=d$ atëherë $(a^2,ab,b^2)=d^2$.

44. Tregoni se për çdo $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ dhe për çdo $n\in\mathbb{N}$ vlen

$$\left(\frac{a^n-b^n}{a-b},a-b\right)=(n(a,b)^{n-1},a-b).$$

45. Nëse $(a,b)=1,m,n\in\mathbb{N}$ atëherë $(a^m-b^m,a^n-b^n)=a^{(m,n)}-b^{(m,n)}$.

46. Nëse $(m,n)=1$ atëherë $(mx+ny,mn)=1\Leftrightarrow(x,n)=(y,m)=1$.

47. Të tregohet se për çdo $m,a\in\mathbb{N},a>1$ vlen

$$(a-1,m)=\left(\frac{a^m-1}{a-1},a-1\right).$$

48. Të tregohet se $\forall m\in\mathbb{N}$ vlen $(2^m+3^m,2^{m+1}+3^{m+1})=1$.

49. Nëse $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ atëherë $(n^2 - 1, 3n + 1) = 1 \Leftrightarrow n -$çift.

50. Të vërtetohet se $a^{2^n} + 1$ është pjesëtues i numrit $a^{2^m} - 1$ për $m > n$ dhe se nëse $a, m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$ vlen:

$$(a^{2^m} + 1, a^{2^n} + 1) = \begin{cases} 2, & \text{nëse } a \text{ është tek} \\ 1, & \text{nëse } a \text{ është çift} \end{cases}.$$

51. Le të jetë $d = (a, b), b = \beta d$ dhe $n > 1$. Nëse β është numër tek, të vërtetohet se $(n^a + 1, n^b - 1) \leq 2$.

52. Nëse $a, b \in \mathbb{N}$ janë numra natyrorë, të vërtetohet se

$$a^n + b^n \leq (a, b)^n + [a, b]^n, n \in \mathbb{N}.$$

53. Të vërtetohet se për çdo numër natyror k ekziston numri natyror n ashtu që $n \cdot 2^k + 17$ të jetë katror i plotë.

54. Ndryshimi i dy numrave tek është i barabartë me 2^n. Të vërtetohet se ata janë relativisht të thjeshtë.