ELEMENTET E ALGJEBRES II

1. GRUPOIDET. SEMIGRUPET. KUAZIGRUPET

1. Le të jetë $\mathbb{Q}^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$. Tregoni se Q^* në lidhje me pjesëtimin e numrave racional është grupoid. A është veprimi komutativ? A është veprimi asociativ?

2. Cilat nga grupoidet vijuese kanë element njësi

a) $(\mathbb{Z},+)$. *b*) $(\mathbb{Q}^*,:)$. *c*) $(\mathbb{C},\cdot)$.

d) Grupoidi i të gjitha pasqyrimeve të bashkësisë $\{1,2,3,4\}$ në vetvete në lidhje me kompozimin e pasqyrimeve.

3. Të caktohet elementi njësi në grupoidin $(\mathbb{Q},\circ)$ ku:

a) $x \circ y = x + y - xy$

b) $x \circ y = x - y - xy$.

4. Le të jetë $G = \{1,2,3,4\}$. Veprimet binare në G të dhëna në tabelat vijuese e shndërrojnë bashkësinë G në grupoid.

$\circ$	1	2	3	4
1	**1**	**2**	**3**	**4**
2	**2**	**4**	**2**	**4**
3	**3**	**2**	**1**	**4**
4	**4**	**4**	**4**	**4**

$\circ$	1	2	3	4
1	**1**	**2**	**3**	**4**
2	**2**	**4**	**4**	**3**
3	**3**	**4**	**1**	**2**
4	**4**	**2**	**3**	**1**

$\circ$	1	2	3	4
1	**1**	**1**	**1**	**1**
2	**2**	**2**	**2**	**2**
3	**3**	**3**	**3**	**3**
4	**4**	**4**	**4**	**4**

a) Cili nga grupoidet është semigrup?

b) Cili nga grupoidet ka element njësi?

c) Cili nga elementet ka invers?

5. Le të jetë $(\mathbb{Q},\circ)$ ku

$$a \circ b = a - b + ab.$$

a) A është $(\mathbb{Q},\circ)$ semigrup?

b) A ekziston elementi njësi në $(\mathbb{Q},\circ)$?

c) Cili nga elementet ka invers?

6. Le të jetë $(\mathbb{Z},\circ)$ ku

$$a \circ b = a + b - ab.$$

a) A është $(\mathbb{Z},\circ)$ semigrup?

b) A ekziston elementi njësi në $(\mathbb{Z},\circ)$?

c) Cili nga elementet ka invers?

7. Le të jenë a,b,c elemente të një semigrupi që kanë invers. Tregoni se edhe elementi $a(bbc)$ ka invers dhe ai është $(c^{-1}b^{-1})a^{-1}$.

8. Le të jetë $G=\{-1,1\}$. A është $(G,\cdot)$ semigrup, nëse $\cdot$ është shumëzimi i numrave të plotë?

9. Le të jetë $G=\{1,-1,i,-i\}, i=\sqrt{-1}$. Tregoni se $(G,\cdot)$ është semigrup, ku $\cdot$ është shumëzimi i numrave kompleks.

10. Le të jetë G_n bashkësia e numrave të plotë që plotpjesëtohen me n. Për çfarë vlera të $n-$it $(G_n,\cdot)$ është grupoid (veprimi $\cdot$ është shumëzimi i zakonshëm i numrave të plotë) ?

11. Le të jetë G bashkësia e pasqyrimeve nga $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ në $\mathbb{R}$ të dhëna me:

për $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$$f_1 : x \mapsto x, \qquad f_2 : x \mapsto \frac{1}{1-x}, \qquad f_3 : x \mapsto \frac{x-1}{x},$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{1}{x}, \qquad f_5 : x \mapsto \frac{x}{1-x}, \qquad f_6 : x \mapsto 1-x.$$

Supozojmë se $G_{ij}=\{f_i,f_j\}$ dhe se $\circ$ është kompozimi i pasqyrimeve.

Në cilin nga rastet vijuese kemi grupoid.

a) $(G_{12},\circ)$, *b)* $(G_{13},\circ)$, *c)* $(G_{14},\circ)$,

d) $(G_{15},\circ)$, *e)* $(G_{16},\circ)$, *f)* $(G_{56},\circ)$.

12. Le të jenë $F=\{f_1,f_2,f_3\}, H=\{f_1,f_2,f_4,f_6\}$ ku $f_i, i=1,2,...,6$ janë përkufizuar si në detyrën paraprake. Tregoni se $(F,\circ)$ është grupoid kurse $(H,\circ)$ nuk është grupoid.

13. Veprimi binary α në $\mathbb{R}$ është dhënë përmes

$$\alpha : (a,b) \mapsto |a-b|, \text{ për } a,b \in \mathbb{R}.$$

Tregoni se (R,α) është komutativ por jo asociativ.

14. Veprimi binary β në $\mathbb{R}$ është dhënë përmes

$$\beta : (a,b) \mapsto \min\{a,b\}, \text{ për } a,b \in \mathbb{R}.$$

Tregoni se $(\mathbb{R},\beta)$ është edhe komutativ e edhe asociativ.

15. Le të jetë $G = \{\alpha \mid \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Për $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ përkufizojmë pasqyrimin

$$\alpha * \beta = \alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha,$$

ku $\circ$ është kompozimi i pasqyrimeve dhe

$$\text{për çdo } x \in \mathbb{R},\ x(\alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha) = x(\alpha \circ \beta) - x(\beta \circ \alpha).$$

a) Tregoni se $(G,*)$ është grupoid.

b) $(G,*)$ nuk është as asociativ e as komutativ.

c) $(\alpha * \beta) * \alpha = \alpha * (\beta * \alpha)$, për çdo $\alpha,\beta \in G$.

d) $\alpha * \beta = (-\beta) * \alpha$, ku $-\beta$ është element nga G i përkufizuar me

$$-\beta : x \mapsto -(x\beta), \text{ për çdo } x \in \mathbb{R}.$$

16. Le të jetë G si në detyrën paraprake. Për $a,b \in G$ përkufizojmë

$$a * b = \frac{a \circ b + b \circ a}{2},$$

ku $\circ$ është shumëzimi i zakonshëm i pasqyrimeve dhe

$$x\frac{a \circ b + b \circ a}{2} = \frac{x(a \circ b) + x(b \circ a)}{2}, \text{ për çdo } x \in G.$$

Tregoni se :

a) $(G,*)$ është grupoid.

b) $(G,*)$ është komutativ por jo asociativ.

c) $(a * b) * a = a * (b * a)$ për çdo $a,b \in G$.

17. Për $\alpha,\beta \in G = \{\alpha \mid \alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$ le të jetë $\alpha \times \beta$ pasqyrimi i përkufizuar me

$$x(\alpha \times \beta) = x\alpha \cdot x\beta,$$

ku $x \in \mathbb{Z}$ dhe $\cdot$ është shumëzimi i numrave të plotë. A është $(G,\times)$ grupoid? A ka element njësi? Cilët elemente kanë invers?

18. Cilët elemente të $(G,\cdot)$, ku $G = \{1,-1,i,-i\}, i = \sqrt{-1}$ dhe $\cdot$ është shumëzimi I numrave kompleks, kanë invers?

19. Le të jenë $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ si në detyrën 11. Tregoni se G në lidhje me kompozimin e pasqyrimeve është semigrup me njësh. Gjeni inversin e secilit element në $(G,\circ)$.