

# ANALIZA MATEMATIKE I

## I. HYRJE

## Pjesa 1

### 1. Shprehjet racionale algjebrike

**Përkufizimi 1.** Shprehja

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

ku  $a_0, a_1, \dots, a_n$  janë numra realë,  $x$  numër realë, quhet *polinom* (realë).

**Përkufizimi 2.** Nëse  $a_n \neq 0$ , numri  $n$  – quhet *shkallë e polinomit*  $p(x)$ . Simbolikisht shënohet

$$\deg p(x) = n.$$

Në këtë rast themi se polinomi  $p$  është i shkallës së  $n$  – të sipas  $x$  – it.

**Përkufizimi 3.** Le të jenë dhënë polinomet

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Polinomet  $p(x)$  dhe  $q(x)$  janë *identikisht të barabartë* atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

**Pohimi Bezu.** Gjatë pjesëtimit të polinomit  $p(x)$  me  $x - a$ ,  $a = \text{const}$ , mbetja është e barabartë me  $p(a)$ . Nëse mbetja  $p(a) = 0$ , atëherë polinomi  $p(x)$  plotpjesëtohet me  $x - a$ .

**Detyra 1.** Është dhënë polinomi  $p(x) = 2ax^3 - 5ax^2 - ax - 6$ .

a) Të caktohet parametri  $a$  ashtu që polinomi  $p(x)$  të plotpjesëtohet me  $x - 1$ , dhe të caktohet herësi në këtë rast.

b) Të caktohet parametri  $a$  ashtu që gjatë pjesëtimit të polinomit  $p(x)$  me  $(x - 1)$  të merret mbetja  $-10$ .

**Zgjidhja.**

$$a) (2ax^3 - 5ax^2 - ax - 6) : (x - 1) = 2ax^2 - 3ax - 4a$$

$$\begin{array}{r} \underline{\pm 2ax^3 \mp 2ax^2} \\ -3ax^2 - ax - 6 \\ \underline{\mp 3ax^2 \pm 3ax} \\ -4ax - 6 \\ \underline{\mp 4ax \pm 4a} \\ -6 - 4a \end{array}$$

$$\text{Pra } r(x) = -6 - 4a.$$

Duhet që mbetja të jetë zero, pra  $-6 - 4a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$ . Për këtë vlerë të  $a$  – së merret herësi

$$2ax^2 - 3ax - 4a = 2\left(-\frac{3}{4}\right)x^2 - 3\left(-\frac{3}{4}\right)x - 4\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + 3.$$

b) Është e qartë se mbetja është  $-6 - 4a$ . Kushti është që mbetja të jetë  $-10$ .

$$\text{Pra } -6 - 4a = -10 \Rightarrow -4a = -10 + 6 \Rightarrow a = 1.$$

Të thjeshtohen shprehjet racionale:

$$\text{Detyra 2. a) } \frac{x}{x-3} + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x(2-x)}{x^2-2x-3}; \quad \text{b) } \frac{2x+1}{x-4} + \frac{1-2x}{x+3} + \frac{1}{x^2-x-12}.$$

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x}{x-3} + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x(2-x)}{x^2-2x-3} &= \frac{x}{x-3} + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x(2-x)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x(x+1) + (2x-1)(x-3) + 3x(2-x)}{(x+1)(x-3)} \\ &= \frac{x^2 + x + 2x^2 - 6x - x + 3 + 3x(2-x)}{(x+1)(x-3)} = \frac{3x^2 - 6x + 3 + 6x - 3x^2}{(x+1)(x-3)} = \frac{3}{(x+1)(x-3)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2x+1}{x-4} + \frac{1-2x}{x+3} + \frac{1}{x^2-x-12} &= \frac{2x+1}{x-4} + \frac{1-2x}{x+3} + \frac{1}{(x-4)(x+3)} = \frac{(2x+1)(x+3) + (x-4)(1-2x) + 1}{(x-4)(x+3)} \\ &= \frac{2x^2 + x + 6x + 3 + x - 2x^2 - 4 + 8x + 1}{(x-4)(x+3)} = \frac{16x}{(x-4)(x+3)}. \end{aligned}$$

$$\text{Detyra 3. a) } \frac{x^2+2}{x^2+x+1} : \left( \frac{3}{x-1} + \frac{1-3x-x^2}{x^3-1} \right).$$

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{x^2+x+1} : \left( \frac{3}{x-1} + \frac{1-3x-x^2}{x^3-1} \right) &= \frac{x^2+2}{x^2+x+1} : \left( \frac{3}{x-1} + \frac{1-3x-x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) \\ &= \frac{x^2+2}{x^2+x+1} : \left( \frac{3(x^2+x+1) + 1-3x-x^2}{(x-1)(x^2+x+1)} \right) = \frac{x^2+2}{x^2+x+1} \cdot \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{3x^2+3x+3+1-3x-x^2} = \frac{(x^2+2)(x-1)}{2x^2+4} \\ &= \frac{(x^2+2)(x-1)}{2(x^2+2)} = \frac{x-1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Detyra 4. a) } \frac{|x|+1}{x^2-1} - \frac{x^2+|x|}{x^2+2|x|+1}; \quad \text{b) } \frac{|x^3+1|+|x-1|}{x^3+x}.$$

**Zgjidhja.**

a) Duke u mbështetur në përkufizimin e vlerës absolute

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

merren rastet: 1)  $x \geq 0$ ; 2)  $x < 0$ .

1) Nëse  $x \geq 0$  atëherë  $|x| = x$ . Kemi:

$$\begin{aligned} \frac{|x|+1}{x^2-1} - \frac{x^2+|x|}{x^2+2|x|+1} &= \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} + \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1+x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x+1+x^2-x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}. \end{aligned}$$

2) Nëse  $x < 0$ ,  $|x| = -x$ , merret:

$$\begin{aligned} \frac{|x|+1}{x^2-1} - \frac{x^2+|x|}{x^2+2|x|+1} &= \frac{-x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2-x}{x^2-2x+1} = \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x+1} - \frac{x}{x-1} = \frac{-(x-1)-x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-x+1-x^2-x}{x^2-1} = \frac{1-x^2-2x}{x^2-1}. \end{aligned}$$

b) Shprehjen e dhënë e transformojmë si vijon:

$$\frac{|x^3+1|+|x-1|}{x^3+x} = \frac{|(x+1)(x^2-x+1)|+|x-1|}{x(x^2+1)} = \frac{|x+1||x^2-x+1|+|x-1|}{x(x^2+1)} = \frac{|x+1|(x^2-x+1)+|x-1|}{x(x^2+1)}.$$

Gjatë transformimit zbatuam vetinë e vlerës absolute  $|ab|=|a||b|$  si dhe faktin që  $x^2 - x + 1 > 0$ . Pra  $|x^2 - x + 1| = x^2 - x + 1$ .

**Shënim.**  $x^2 - x + 1 > 0$  sepse  $x^2 - x + 1 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ .

Në vijim detyrën e shqyrtojmë në intervalet: 1)  $x \in (-\infty, -1]$ ; 2)  $x \in (-1, 1]$ ; 3)  $x \in (1, +\infty)$ .

1) Nëse  $x \in (-\infty, -1]$ , atëherë  $x + 1 \leq 0 \Rightarrow |x + 1| = -(x + 1)$ ,  $x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = -(x - 1)$ . Merret:

$$\frac{-(x+1)(x^2-x+1)+(-(x-1))}{x(x^2+1)} = \frac{-(x^3+1)-x+1}{x(x^2+1)} = \frac{-x^3-1-x+1}{x(x^2+1)} = \frac{-(x^3+x)}{x(x^2+1)} = -1.$$

2) Nëse  $x \in (-1, 1]$ , atëherë  $x + 1 > 0 \Rightarrow |x + 1| = x + 1$ ;  $x - 1 \leq 0 \Rightarrow |x - 1| = -(x - 1) = -x + 1 = 1 - x$ .

$$\text{Merret } \frac{(x+1)(x^2-x+1)+1-x}{x(x^2+1)} = \frac{x^3+1+1-x}{x(x^2+1)} = \frac{x^3-x+2}{x(x^2+1)}.$$

3) Nëse  $x \in (1, +\infty)$  atëherë  $x + 1 > 0 \Rightarrow |x + 1| = x + 1$ ,  $x - 1 > 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1$ .

$$\text{Merret } \frac{(x+1)(x^2-x+1)+x-1}{x(x^2+1)} = \frac{x^3+1+x-1}{x(x^2+1)} = 1.$$

Përfundimisht mund të shkruajmë  $\frac{|x^3+1|+|x-1|}{x^3+x} = \begin{cases} -1, & \text{nëse } x \in (-\infty, -1] \\ \frac{x^2-x+2}{x(x^2+1)} & \text{nëse } x \in (-1, 1] \\ 1, & \text{nëse } x \in (1, +\infty) \end{cases}$ .

Funksionet e dhëna racionale, të shprehen si shumë e funksioneve elementare racionale

**Detyra 5.**  $\frac{x}{(x+2)(x-3)}$ .

**Zgjidhja.**

Shprehjen e dhënë e shënojmë si vijon:

$$\frac{x}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

Merret

$$x = A(x-3) + B(x+2)$$

$$x = Ax - 3A + Bx + 2B$$

$$x = (A+B)x + (-3A+2B)$$

Merret sistemi  $\begin{cases} A+B=1 \\ -3A+2B=0 \end{cases}$  me zgjidhjen e të cilit merret  $A = \frac{2}{5}, B = \frac{3}{5}$ .

Përfundojmë se  $\frac{x}{(x+2)(x-3)} = \frac{\frac{2}{5}}{x+2} + \frac{\frac{3}{5}}{x-3} = \frac{2}{5(x+2)} + \frac{3}{5(x-3)}$ .

**Detyra 6.**  $\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}$ .

**Zgjidhja.**

Shprehjen e dhënë e shënojmë si vijon:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

Merret

$$x^2+2 = A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2$$

$$x^2 + 2 = A(x^2 - 2x + x - 2) + Bx - 2B + C(x^2 + 2x + 1)$$

$$x^2 + 2 = Ax^2 - Ax - 2A + Bx - 2B + Cx^2 + 2Cx + C$$

$$x^2 + 2 = (A + C)x^2 + (-A + B + 2C)x + (-2A - 2B + C)$$

$$\text{Kemi sistemin } \begin{cases} A + C = 1 \\ -A + B + 2C = 0 \\ -2A - 2B + C = 2 \end{cases} \text{ me zgjidhjen e të cilit merret } A = \frac{1}{3}, B = -1, C = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Përfundojmë se } \frac{x^2 + 2}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{x-2} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{3(x-2)}.$$

## 2. Fuqizimi dhe rrënjëzimi

**Detyra 6.** Të vërtetohet se shprehja  $\frac{a^{-2x} - a^{-x} - 6}{a^{-2x} - 4} - \frac{a^{-x} - 1}{2 - a^{-x}} - 2$  nuk varet nga  $a, x$ .

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} \frac{a^{-2x} - a^{-x} - 6}{a^{-2x} - 4} - \frac{a^{-x} - 1}{2 - a^{-x}} - 2 &= \frac{\frac{1}{a^{2x}} - \frac{1}{a^x} - 6}{\frac{1}{a^{2x}} - 4} - \frac{\frac{1}{a^x} - 1}{2 - \frac{1}{a^x}} - 2 = \frac{1 - a^x - 6a^{2x}}{a^{2x}} - \frac{1 - a^x}{\frac{2a^x - 1}{a^x}} - 2 \\ &= \frac{1 - 3a^x + 2a^x - 6a^{2x}}{1 - (2a^x)^2} - \frac{1 - a^x}{2a^x - 1} - 2 = \frac{(1 - 3a^x) + 2a^x(1 - 3a^x)}{(1 - 2a^x)(1 + 2a^x)} + \frac{1 - a^x}{1 - 2a^x} - 2 \\ &= \frac{(1 - 3a^x)(1 + 2a^x)}{(1 - 2a^x)(1 + 2a^x)} + \frac{1 - a^x}{1 - 2a^x} - 2 = \frac{1 - 3a^x}{1 - 2a^x} + \frac{1 - a^x}{1 - 2a^x} - 2 = \frac{1 - 3a^x + 1 - a^x}{1 - 2a^x} - 2 = \frac{2(1 - 2a^x)}{1 - 2a^x} - 2 = 0. \end{aligned}$$

**Detyra 7.** Njehsoni  $\left(\frac{12}{\sqrt{5}+1} + \frac{7}{\sqrt{5}-2} + \frac{4}{3-\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14}$ .

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} \left(\frac{12}{\sqrt{5}+1} + \frac{7}{\sqrt{5}-2} + \frac{4}{3-\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14} &= \left(\frac{12}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} + \frac{7}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} + \frac{4}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14} \\ &= \left(\frac{12\sqrt{5}-12}{5-1} + \frac{7\sqrt{5}+14}{5-4} + \frac{12+4\sqrt{5}}{9-5}\right) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14} = \left(\frac{12(\sqrt{5}-1)}{4} + 7\sqrt{5}+14 + (3+\sqrt{5})\right) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14} \\ &= (3\sqrt{5}-3+7\sqrt{5}+14+3+\sqrt{5}) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14} = (11\sqrt{5}+14) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14} = 1. \end{aligned}$$

**Detyra 8.** Tregoni se  $\frac{a+b-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ ,  $a, b > 0$ .

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} \frac{a+b-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \left(\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}\right) &= \frac{a+b-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot \left(\frac{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}+a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{(a+\sqrt{ab})(a-\sqrt{ab})}\right) \\ &= \frac{a+b-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{a}(a+b)}{a^2-ab} = \frac{a+b-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{a} \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot \frac{\sqrt{a}(a+b)}{a(a-b)} \\ &= \frac{a+b-1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+b)}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a+b-1-a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = -\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}. \end{aligned}$$

**Detyra 9.** Nëse  $a = (1 + \sqrt{2})^{-1}$ ;  $b = (1 - \sqrt{2})^{-1}$  të njehsohet vlera e shprehjes  $(a+1)^{-2} + (b+1)^{-2}$ .

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} (a+1)^{-2} + (b+1)^{-2} &= ((1 + \sqrt{2})^{-1} + 1)^{-2} + ((1 - \sqrt{2})^{-1} + 1)^{-2} \\ &= \left( \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + 1 \right)^{-2} + \left( \frac{1}{1 - \sqrt{2}} + 1 \right)^{-2} = \left( \frac{1 + 1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^{-2} + \left( \frac{1 + 1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \right)^{-2} = \left( \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^{-2} + \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \right)^{-2} \\ &= \left( \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{1 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{4 + 4\sqrt{2} + 2} + \frac{1 - 2\sqrt{2} + 2}{4 - 4\sqrt{2} + 2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{6 + 4\sqrt{2}} + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6 - 4\sqrt{2}} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2(3 + 2\sqrt{2})} + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

### 3. Barazimet dhe mosbarazimet

**Detyra 10.** a)  $\frac{1-x}{2x(x-2)} - \frac{5-x}{2x^2-4x} = \frac{1}{x+2}$ ;      b)  $\frac{x+1}{3x^2-x} - \frac{1}{3x+1} = \frac{2}{x(9x^2-1)}$ ;

c)  $\frac{1}{y^2-9} + \frac{2}{y^2-6y+9} - \frac{3}{y^2+5y+6} = 0$ ;      d)  $\frac{4x}{1+6x+12x^2+8x^3} = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{6}{2+8x+8x^2}$ .

**Zgjidhja.**

a)  $\frac{1-x}{2x(x-2)} - \frac{5-x}{2x^2-4x} = \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1-x}{2x(x-2)} - \frac{5-x}{2x(2-x)} = \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1-x}{2x(x-2)} - \frac{5-x}{2x(x-2)} - \frac{1}{x+2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-x)(x+2) - (5-x)(x+2) - 2x(x-2)}{2x(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x-(5-x))(x+2) - 2x^2 + 4x}{2x(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-x-5+x)(x+2) - 2x^2 + 4x}{2x(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x-8-2x^2+4x}{2x(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2-8}{2x(x-2)(x+2)} = 0 \mid \cdot 2x(x-2)(x+2), x \neq 0, x \neq 2, x \neq -2 \Leftrightarrow -2x^2-8=0 \mid : (-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2+4=0.$$

Por  $x^2+4 > 0$  d.m.th. barazimi nuk ka zgjidhje.

b)  $\frac{x+1}{3x^2-x} - \frac{1}{3x+1} = \frac{2}{x(9x^2-1)} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x(3x-1)} - \frac{1}{3x+1} = \frac{2}{x(3x-1)(3x+1)} \mid \cdot x(3x-1)(3x+1), x \neq 0, x \neq \pm \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x+1) - x(3x-1) = 2 \Leftrightarrow 3x^2+x+3x+1-3x^2+x=2 \Rightarrow 5x=1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}.$$

c)  $\frac{1}{y^2-9} + \frac{2}{y^2-6y+9} - \frac{3}{y^2+5y+6} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(y-3)(y+3)} + \frac{2}{(y-3)^2} - \frac{3}{(y+2)(y+3)} = 0 \mid \cdot (y-3)^2(y+3)(y+2), y \neq \pm 3, y \neq -2$$

$$\Leftrightarrow (y-3)(y+2) + 2(y+2)(y+3) - 3(y-3)^2 = 0 \Leftrightarrow y^2-3y+2y-6+2(y^2+5y+6)-3(y^2-6y+9) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2-y-6+2y^2+10y+12-3y^2+18y-27 = 0 \Leftrightarrow 27y-21=0 \Rightarrow 9y-7=0 \Rightarrow y = \frac{7}{9}.$$

d)  $\frac{4x}{1+6x+12x^2+8x^3} = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{6}{2+8x+8x^2} \Leftrightarrow \frac{4x}{(1+2x)^3} = \frac{1}{(1-2x)(1+2x)} + \frac{6}{2(1+2x)^2} \mid \cdot 2(1-2x)(1+2x)^3$

$$\Leftrightarrow 4x \cdot 2(1-2x) = 2(1+2x)^2 + 6(1-2x)(1+2x) \Leftrightarrow 8x(1-2x) = 2(1+4x+4x^2) + 6(1-4x^2)$$

$$\Leftrightarrow 8x - 16x^2 = 2 + 8x + 8x^2 + 6 - 24x^2 \Leftrightarrow 0 = 8.$$

Meqë kemi arritur në një barazi të pasaktë përfundojmë se barazimi i dhënë nuk ka zgjidhje.

**Detyra 11.** Të zgjidhen mosbarazimet:

$$\begin{array}{lll} a) \frac{x-1}{x^2+1} < 0; & b) \frac{(x-1)^2}{x+1} > 0; & c) \frac{(x-2)^2}{x+3} \leq 0; \\ d) \frac{|x-2|}{x+1} < 0; & e) \frac{|x-1|}{x-1} < 1; & f) \frac{3x}{x+3} < 3. \end{array}$$

**Zgjidhja.**

a) Meqë shprehja  $x^2 + 1 > 0$  për çdo  $x \in \mathbb{R}$  atëherë që thyesa të jetë negative në bazë të ekuivalencës 4) duhet që  $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$ .

b) Meqë  $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  dhe meqë thyesa është pozitive, atëherë numëruesi nuk mund të jetë zero, d.m.th.  $x-1 \neq 0$ , pra  $x \neq 1$ . Nën këtë kusht emërues duhet të jetë pozitiv, pra duhet që  $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$ .

Pra  $x \in (-1, +\infty) \setminus \{1\}$ , që mund të shënohet  $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .

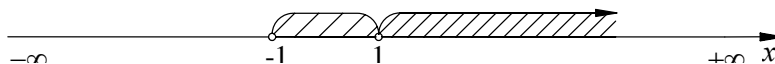


Figura 1

Pika  $x=1$  nuk është zgjidhje e mosbarazimit.

c) Meqë  $(x-2)^2 \geq 0$ , për çdo  $x \in \mathbb{R}$  dhe meqë thyesa është negative ose zero duhet që  $x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$ . Pra  $x \in (-\infty, -3)$ . Meqë edhe  $x=2$  e plotëson mosbarazimin përfundojmë se  $x \in (-\infty, -3) \cup \{2\}$ .

d) Meqë  $|x-2| \geq 0$ , për çdo  $x \in \mathbb{R}$ , së pari duhet që  $x \neq 2$ . Po ashtu  $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$ . Pra,  $x \in (-\infty, -1)$ .

e) Për  $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$ , atëherë mosbarazimi shndërrohet në trajtën

$$\frac{x-1}{x-1} < 1 \Leftrightarrow 1 < 1, \text{ që nuk është e saktë.}$$

Për  $x < 1 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$ . Mosbarazimi shndërrohet në trajtën

$$-\frac{(x-1)}{x-1} < 1 \Leftrightarrow -1 < 1, \text{ që paraqet pohim të saktë.}$$

D.m.th. çdo  $x \in (-\infty, 1)$  është zgjidhje e mosbarazimit.

$$f) \frac{3x}{x+3} < 3 \Leftrightarrow \frac{3x}{x+3} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{3x-3x-9}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{-9}{x+3} < 0.$$

Meqë numëruesi është negativ, atëherë që thyesa të jetë negative duhet që  $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$ .

**Detyra 12.** Të zgjidhen mosbarazimet e dyfishta:

$$\begin{array}{lll} a) 1 < \frac{x-1}{x-3} < 4; & b) -2 < \frac{x+1}{2x-3} < 2; & c) 0 \leq \frac{x-1}{4-x} \leq 3. \end{array}$$

**Zgjidhja.**

a) Kemi mosbarazimet:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-3} > 1 \\ \frac{x-1}{x-3} < 4 \end{cases} \sim \begin{cases} \frac{x-1}{x-3} - 1 > 0 \\ \frac{x-1}{x-3} - 4 < 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \frac{x-1-x+3}{x-3} > 0 \\ \frac{x-1-4x+12}{x-3} < 0 \end{cases} \square \begin{cases} \frac{2}{x-3} > 0 \\ \frac{-3x+11}{x-3} < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Zgjidhja e mosbarazimit (1) është  $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$ .

Mosbarazimi (2) është ekuivalent me mosbarazimet:

$$\begin{aligned}
 & (-3x+11 > 0 \wedge x < 3) \vee (-3x+11 < 0 \wedge x-3 > 0) \Leftrightarrow (3x < 11 \wedge x < 3) \vee (3x > 11 \wedge x > 3) \\
 & \Leftrightarrow \left(x < \frac{11}{3} \wedge x < 3\right) \vee \left(x > \frac{11}{3} \wedge x > 3\right) \Leftrightarrow x < 3 \vee x > \frac{11}{3}. \text{ Pra } x \in (-\infty, 3) \cup \left(\frac{11}{3}, +\infty\right).
 \end{aligned}$$

Në një grafik të përbashkët paraqesim bashkësitë e zgjidhjeve të mosbarazimeve (1) dhe (2).

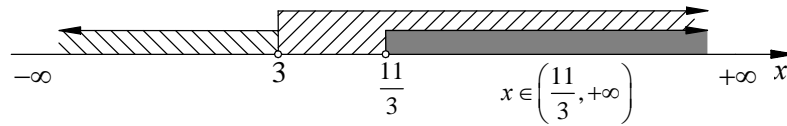


Figura 1

Nga figura vërejmë se  $x \in \left(\frac{11}{3}, +\infty\right)$  (Zgjidhja paraqet prerjen e bashkësive të zgjidhjeve të mosbarazimeve (1), (2)).

b) Kemi mosbarazimet:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2x-3} > -2 \\ \frac{x+1}{2x-3} < 2 \end{cases} \sim \begin{cases} \frac{x+1}{2x-3} + 2 > 0 \\ \frac{x+1}{2x-3} - 2 < 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \frac{x+1+4x-6}{2x-3} > 0 \\ \frac{x+1-4x+6}{2x-3} < 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \frac{5x-5}{2x-3} > 0 \\ \frac{-3x+7}{2x-3} < 0 \end{cases} \begin{matrix} | : 5 \\ \sim \end{matrix} \begin{cases} \frac{x-1}{2x-3} > 0 \\ \frac{7-3x}{2x-3} < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Pasi të zgjidhet mosbarazimi (1) merret  $x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ .

Pasi të zgjidhet mosbarazimi (2) merret  $x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{3}, +\infty\right)$ .

Bashkësitë e zgjidhjeve i paraqesim në një grafik të përbashkët, dhe caktojmë prerjen e tyre, që paraqet bashkësinë e zgjidhjeve. Merret:

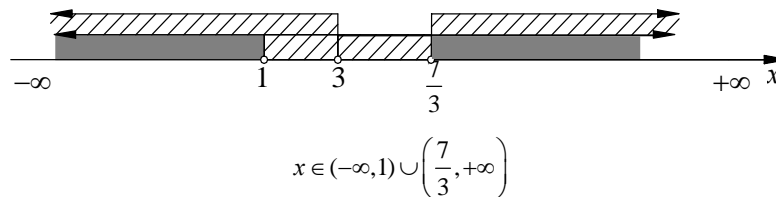


Figura 2

Përfundojmë se  $x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{7}{3}, +\infty\right)$ .

c) **Udhëzim.** Mosbarazimi është ekuivalent me mosbarazimet 
$$\begin{cases} \frac{x-1}{4-x} \geq 0 \\ \frac{4x-13}{4-x} \leq 0 \end{cases}$$

Zgjidhja e mosbarazimit është  $x \in \left[1, \frac{13}{4}\right]$ .

**Detyra 13.** 
$$\frac{x}{2x^2-x-1} - \frac{5}{2x+1} = \frac{4x-5}{x^2-1}$$

**Zgjidhja.**

Edhe këtu barazimi është i mundur nëse  $2x^2-x-1 \neq 0 \wedge 2x+1 \neq 0 \wedge x^2-1 \neq 0$

Nga  $2x^2-x-1=0$  merret  $x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 2(-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4}$ .

$$\text{D.m.th. } x_{1/2} \neq \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 \neq 1 \wedge x_2 \neq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Nga } 2x+1 \neq 0 \wedge x^2-1 \neq 0 \text{ merret } x_3 \neq -\frac{1}{2}, x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x_{4/5} \neq \pm 1.$$

Bashkësia e zgjidhjeve të barazimit të dhënë kërkohet në  $R \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$ .

$$\text{Meqë } 2x^2-x-1=2\left(x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)=2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) \text{ merret}$$

$$\frac{x}{2x^2-x-1}-\frac{5}{2x+1}=\frac{4x-5}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}-\frac{5}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{4x-5}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{(x-1)(2x+1)}-\frac{5}{2x+1}=\frac{4x-5}{(x-1)(x+1)} \cdot (x-1)(x+1)(2x+1) \Leftrightarrow x(x+1)-5(x-1)(x+1)=(4x-5)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-5(x^2-1)=8x^2+4x-10x-5 \Leftrightarrow x^2+x-5x^2+5=8x^2-6x-5 \Leftrightarrow -12x^2+7x+10=0$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4 \cdot (-12) \cdot 10}}{2 \cdot (-12)}=\frac{-7 \pm \sqrt{49+480}}{-24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-7 \pm \sqrt{529}}{-24}=\frac{-7 \pm 23}{-24} \Leftrightarrow x_1=\frac{-7+23}{-24}=\frac{16}{-24}=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow x_2=\frac{-30}{-24}=\frac{5}{4}.$$

**Detyra 14.**  $x^2+|x+3|+|x-3|=4.5|x|+6$ .

**Zgjidhja.**

Së pari shikojmë se si zbërthehen vlerat absolute:

$$|x+3|=\begin{cases} x+3, & x+3 \geq 0, x \geq -3 \\ -(x+3), & x < -3 \end{cases}; |x-3|=\begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ -(x-3), & x < 3 \end{cases}; |x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Në këtë rast bashkësia e numrave realë  $R$  ndahet në këto intervale:

$$x \in (-\infty, -3) \vee (-3, 0) \vee (0, 3) \vee (3, +\infty)$$

I) Për  $x \in (-\infty, -3) \Rightarrow |x+3|=-(x+3)$ ,  $|x-3|=-(x-3)$  dhe  $|x|=-x$  barazimi ka trajtën:

$$x^2-(x+3)-(x-3)=4.5(-x)+6 \Leftrightarrow x^2-x-3-x+3=\frac{45}{10}(-x)+6 \Leftrightarrow x^2-2x=-\frac{9}{2}x+6 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x=-9x+12 \Rightarrow 2x^2-4x+9x-12=0 \Leftrightarrow 2x^2+5x-12=0 \Rightarrow x_{1/2}=\frac{-5 \pm \sqrt{25+4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2}=\frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{4}=\frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4}=\frac{-5 \pm 11}{4} \Rightarrow x_1=\frac{-5+11}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}, x_2=\frac{-5-11}{4}=\frac{-16}{4}=-4.$$

Meqë  $x_1=\frac{3}{2} \notin (-\infty, -3)$  mbetet se zgjidhja e vetme në këtë rast është  $x_2=-4$ .

II) Për  $x \in (-3, 0)$  merret:  $|x+3|=(x+3)$ ,  $|x-3|=-(x-3)$ ,  $|x|=-x$ .

$$x^2+x+3-(x-3)=\frac{9}{2}(-x)+6 \Leftrightarrow x^2+x+3-x+3=-\frac{9}{2}x+6 \cdot 2 \Leftrightarrow 2(x^2+6)=-9x+12 \Leftrightarrow 2x^2+12+9x-12=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+9x=0 \Leftrightarrow x(2x+9)=0 \Leftrightarrow x_1=0 \vee 2x+9=0 \Rightarrow x_1=0 \vee x_2=-\frac{9}{2}.$$

Pasi  $x_1=0 \in (-3, 0]$ ,  $x_2=-\frac{9}{2} \notin (-3, 0]$  përfundojmë se  $x_1$  është zgjidhje e barazimit.

III) Për  $x \in (0, 3)$  merret:  $|x+3|=x+3$ ,  $|x-3|=-(x-3)$ ,  $|x|=x$

$$x^2+x+3-(x-3)=\frac{9}{2}x+6 \Leftrightarrow x^2+x+3-x+3=\frac{9}{2}x+6 \Rightarrow x^2+6=\frac{9}{2}x+6 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x(2x - 9) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{9}{2}.$$

Edhe këtu  $x_1 = 0 \in [0, 3)$ , d.m.th. se  $x_1$  është zgjidhje e barazimit.

IV) Nëse  $x \in (3, +\infty)$ , atëherë kemi:  $|x+3| = x+3$ ,  $|x-3| = x-3$ ,  $|x| = x$ .

$$x^2 + x + 3 + x - 3 = \frac{9}{2}x + 6 \Leftrightarrow x^2 + 2x = \frac{9}{2}x + 6 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 9x + 12 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2}, \quad x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}, \quad x_1 = \frac{5 + 11}{4} = 4, \quad x_2 = \frac{5 - 11}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Meqë  $x_1 = 4 \in (3, +\infty)$  përfundojmë se  $x_1$  paraqet zgjidhje të barazimit kurse  $x_2$  nuk është zgjidhje e barazimit.

Zgjidhjet e barazimit të fillimit janë  $B(E) = \{-4, 0, 4\}$ .

**Detyra 15.** Të caktohet natyra e zgjidhjeve të barazimeve, në varësi të parametrin  $m$ .

$$(m-2)x^2 - (m+1)x + m + 1 = 0.$$

**Zgjidhja.**

a)  $(m-2)x^2 - (m+1)x + m + 1 = 0$ . Në këtë rast  $a = m-2$ ,  $b = -(m+1)$ ,  $c = m+1$ .

Varësisht nga dallori  $D = b^2 - 4ac$  dallojmë këto raste:

I) Nëse  $D = 0$  barazimi ka zgjidhje reale të dyfishtë.

$$D = b^2 - 4ac = (-(m+1))^2 - 4(m-2)(m+1) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - 4(m^2 - m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 - 4m^2 + 4m + 8 = 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 6m + 9 = 0 \Leftrightarrow -3(m^2 - 2m - 3) = 0.$$

$$m_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}, \quad m_1 = \frac{2 + 4}{2} = 3, \quad m_2 = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

II) Nëse  $D > 0$ , barazimi ka dy zgjidhje reale të ndryshme mes veti, kjo d.m.th. për

$$-3m^2 + 6m + 9 > 0 \Leftrightarrow 3(m^2 - 2m - 3) < 0 \Leftrightarrow 3(m-3)(m+1) < 0$$

$m$	$-\infty$	$-1$	$-3$	$+\infty$
$m+1$	-	+		+
$m-3$	-	-		+
$(m-3)(m+1)$	+	-		+

d.m.th. për  $m \in (-1, 3)$  barazimi ka rrënjë të ndryshme reale.

III) Nëse  $D < 0$ , barazimi ka rrënjë komplekse të konjuguara.

$$\text{d.m.th. për } -3m^2 + 6m + 9 < 0 \Leftrightarrow -3(m^2 - 2m - 3) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 > 0.$$

Nga tabela vërejmë se mosbarazimi vlen për  $m \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ .

**Detyra 16.** Caktoni vlerat e parametrin  $m$  ashtu që të plotësohet relacioni

$$-6 < \frac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} < 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Zgjidhja.**

Nga këto relacione marrim se

$$\begin{cases} \frac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} - 4 < 0 \\ \frac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} + 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x^2 + mx - 4 - 4(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} < 0 \\ \frac{2x^2 + mx - 4 + 6(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2x^2 + (m+4)x - 8}{x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} < 0 \\ \frac{8x^2 + (m-6)x + 2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-2x^2 + (m+4)x - 8}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} < 0 \\ \frac{8x^2 + (m-6)x + 2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} > 0 \end{cases}$$

Mosbarazimet e fundit vlejnë kur  $-2x^2 + (m+4)x - 8 < 0$  dhe  $8x^2 + (m-6)x + 2 > 0$

(sepse  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ).

Zgjidhim në vijim veçmas të dy jobarazimet:

$$-2x^2 + (m+4)x - 8 < 0$$

Kjo është e mundur atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $D = b^2 - 4ac < 0$ , d.m.th

$$(m+4)^2 - 4(-2)(-8) < 0 \Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 - 64 < 0 \Leftrightarrow m^2 + 8m - 48 < 0 \Leftrightarrow (m-4)(m+12) < 0$$

$m$	$-\infty$	$-12$	$4$	$+\infty$
$m+12$	-	+	+	
$m-4$	-	-	+	
$(m-4)(m+12)$	+	-	+	

Pra  $m \in (-12, 4)$

(1)

Ndërsa nga relacioni i dytë kemi:

$$8x^2 + (m-6)x + 2 > 0 \Leftrightarrow D < 0 \Leftrightarrow (m-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 36 - 64 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m - 28 < 0$$

$$\Leftrightarrow (m-14)(m+2) < 0$$

$m$	$-\infty$	$-2$	$14$	$+\infty$
$m+2$	-	+	+	
$m-14$	-	-	+	
$(m+2)(m-14)$	+	-	+	

Pra  $m \in (-2, 14)$

(2)

Nga (1) dhe (2) merret prerja e tyre si zgjidhje finale dhe ajo është  $m \in (-2, 4)$ .

**Detyra 17.** Të zgjidhet barazimi bikuadratik

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$$

**Zgjidhja.**

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} + 3 \frac{x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 5}{x} + 3 \frac{1}{\frac{x^2 + x - 5}{x}} + 4 = 0.$$

Zëvendësojmë  $\frac{x^2 + x - 5}{x} = t$ . Merret

$$t + \frac{3}{t} + 4 = 0 \mid \cdot t \Leftrightarrow t^2 + 3 + 4t = 0 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{-4 + 2}{2} = -1, t_2 = -3.$$

$$\text{Pra} \begin{cases} \frac{x^2 + x - 5}{x} = -1 \\ \frac{x^2 + x - 5}{x} = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} x^2 + x - 5 = -x \\ x^2 + x - 5 = -3x \end{cases} \sim \begin{cases} x^2 + x - 5 + x = 0 \\ x^2 + x - 5 + 3x = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x^2 + 2x - 5 = 0 \\ x^2 + 4x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{prej nga merret } x_{1/2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -1 \pm 1\sqrt{6}, x_{3/4} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow x_3 = 1, x_4 = -5.$$

Të zgjidhen barazimet iracionale:

**Detyra 18.**  $\sqrt{2x+14} - \sqrt{x-7} = \sqrt{x+5}$ .

**Zgjidhja.**

$$\begin{cases} 2x+14 \geq 0 \\ x-7 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x \geq -14 \\ x \geq 7 \\ x \geq -5 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x+14 - 2(\sqrt{2x+14})(\sqrt{x-7}) + x - 7 = x+5 \\ \sqrt{2x+14} - \sqrt{x-7} = \sqrt{x+5} \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x \in [7, +\infty) \\ 3x+7 - 2\sqrt{2x+14}\sqrt{x-7} = x+5 \end{cases} \sim \begin{cases} x \in [7, +\infty) \\ 2x+2 = 2\sqrt{2x+14}\sqrt{x-7} \mid : 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x \geq 7 \\ x+1 = \sqrt{2x+14}\sqrt{x-7} \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x \geq 7 \\ (x^2 + 2x + 1) = (2x^2 - 14x + 14x - 98) \end{cases} \sim \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 98 \end{cases} \sim \begin{cases} x \geq 7 \\ -x^2 + 2x + 1 + 98 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x \geq 7 \\ -x^2 + 2x + 99 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x \geq 0 \\ x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 99}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 396}}{-2} = \frac{-2 \pm 20}{-2} \end{cases} \sim \begin{cases} x \geq 7 \\ x_1 = \frac{-2 + 20}{-2} = \frac{18}{-2} = -9, x_2 = \frac{-2 - 20}{-2} = 11 \end{cases}$$

nga kjo shihet se zgjidhje e barazimit të fillimit është vlera  $x=11$ .

**Detyra 19.**  $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x+2}} = \frac{7}{12}$ .

**Zgjidhja.**

Zëvendësojmë  $\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} = t \Rightarrow \sqrt{\frac{x+2}{2x+2}} = \frac{1}{t}$ . Merret:

$$t - \frac{1}{t} = \frac{7}{12} \mid \cdot 12t \Leftrightarrow 12t^2 - 12 = 7t \Leftrightarrow 12t^2 - 7t - 12 = 0 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-12)}}{2 \cdot 12}$$

$$t_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 144}}{24} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} = \frac{7 \pm \sqrt{625}}{24} = \frac{7 \pm 25}{24} \Rightarrow t_1 = \frac{7 + 25}{24} = \frac{4}{3}, t_2 = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Atëherë} \begin{cases} \sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} = \frac{4}{3} \\ \sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Barazimi i dytë nuk ka zgjidhje.

Zgjidhja e barazimit të parë është

$$\frac{2x+2}{x+2} = \frac{16}{9} \Leftrightarrow 9(2x+2) = 16(x+2) \Leftrightarrow 18x+18 = 16x+32 \Leftrightarrow 18x-16x+18-32=0 \Leftrightarrow 2x=14 \Rightarrow x=7..$$

Dhe pasi të provojmë këtë zgjidhje, përfundojmë se kjo është zgjidhje e barazimit të fillimit.

Të zgjidhen barazimet eksponenciale dhe logaritmike:

**Detyra 20.**  $5^{\frac{2x+2}{5}} - 4^{\frac{2x-5}{3}} = 5^{\frac{2x-3}{5}} + 4^{\frac{2x-2}{3}}$ .

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} 5^{\frac{2x}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{5}} - 4^{\frac{2x}{3}} \cdot 4^{\frac{-5}{3}} &= 5^{\frac{2x}{5}} \cdot 5^{\frac{-3}{5}} + 4^{\frac{2x}{3}} \cdot 4^{\frac{-2}{3}} \Leftrightarrow 5^{\frac{2x}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{5}} - 5^{\frac{2x}{5}} \cdot 5^{\frac{-3}{5}} = 4^{\frac{2x}{3}} \cdot 4^{\frac{-2}{3}} + 4^{\frac{2x}{3}} \cdot 4^{\frac{-5}{3}} \\ \Leftrightarrow 5^{\frac{2x}{5}} \left( 5^{\frac{2}{5}} - 5^{\frac{-3}{5}} \right) &= 4^{\frac{2x}{3}} \left( 4^{\frac{-2}{3}} + 4^{\frac{-5}{3}} \right) \Leftrightarrow 5^{\frac{2x}{5}} \left( \sqrt[5]{5^2} - \frac{1}{\sqrt[5]{5^3}} \right) = 4^{\frac{2x}{3}} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4^5}} \right) \\ \Leftrightarrow 5^{\frac{2x}{5}} \frac{\sqrt[5]{5^2} \sqrt[5]{5^3} - 1}{\sqrt[5]{5^3}} &= 4^{\frac{2x}{3}} \frac{\sqrt[3]{4^3} + 1}{\sqrt[3]{4^5}} \Leftrightarrow 5^{\frac{2x}{5}} \frac{\sqrt[5]{5^5} - 1}{\sqrt[5]{5^3}} = 4^{\frac{2x}{3}} \frac{4+1}{\sqrt[3]{4^5}} \Leftrightarrow 5^{\frac{2x}{5}} \frac{5-1}{\sqrt[5]{5^3}} = 4^{\frac{2x}{3}} \frac{5}{\sqrt[3]{4^5}} \\ \Leftrightarrow 5^{\frac{2x}{5}} \frac{4}{\sqrt[5]{5^3}} &= 4^{\frac{2x}{3}} \frac{5}{\sqrt[3]{4^5}} \left| \cdot \frac{1}{4 \cdot 5} \right. \Leftrightarrow 5^{\frac{2x}{5}} \frac{1}{5^{\frac{3}{5}} \cdot 5} = 4^{\frac{2x}{3}} \frac{1}{4^{\frac{5}{3}} \cdot 4} \Leftrightarrow 5^{\frac{2x}{5} \left( \frac{3}{5} + 1 \right)} = 4^{\frac{2x}{3} \left( \frac{5}{3} + 1 \right)} \Leftrightarrow 5^{\frac{2x \cdot 8}{5}} = 4^{\frac{2x \cdot 8}{3}} \\ \Leftrightarrow 5^{\frac{2x-8}{5}} &= 4^{\frac{2x-8}{3}} \Leftrightarrow (\sqrt[5]{5})^{2x-8} = (\sqrt[3]{4})^{2x-8} \Leftrightarrow 2x-8=0 \Rightarrow x=4. \end{aligned}$$

**Detyra 21.**  $(x^2 - x - 1)^{x^2-1} = 1$ .

**Zgjidhja.**

Dallojmë këto raste:

- 1)  $x^2 - x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2$  dhe  $x_2 = -1$ . Nëse provojmë zgjidhjet e tilla shihet se  $x_1 = 2$  e plotëson barazimin.
- 2)  $x^2 - x - 1 = -1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ . Provohet se  $x = 1$  është zgjidhje.
- 3) Nëse  $x^2 - x - 1 = 0$ , në këtë rast nuk kemi zgjidhje.
- 4) Nëse  $x^2 - x - 1 > 0$  dhe  $x^2 - x - 1 \neq 1$  merret:  
 $(x^2 - x - 1)^{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow (x^2 - x - 1)^{x^2-1} = (x^2 - x - 1)^0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$  merret  $x = -1$ .  
Përfundimisht zgjidhjet janë:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$  dhe  $x_3 = 2$ .

**Detyra 22.**  $1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\log x^2 - 1) \log_x 10$ .

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} 1 + \log_x (4-x) - \log_x 10 &= (\log x^2 - 1) \log_x 10 \Leftrightarrow \log_{10} x \left( 1 + \log_x \frac{(4-x)}{10} \right) = 2 \log x - 1 \\ \Leftrightarrow \log_{10} x + \log_{10} x \cdot \log_x \frac{4-x}{10} &= 2 \log x - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log x + \log x \frac{\log_{10} \frac{4-x}{10}}{\log_{10} x} &= 2 \log x - 1 \Leftrightarrow \log x + \log \frac{4-x}{10} = 2 \log x - 1 \Leftrightarrow \log x \cdot \frac{4-x}{10} = \log x^2 - \log 10 \\ \Leftrightarrow \log x \cdot \frac{4-x}{10} &= \log \frac{x^2}{10} \Leftrightarrow x \frac{4-x}{10} = \frac{x^2}{10} \Leftrightarrow x(4-x) = x^2 \Leftrightarrow 4x - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2. \end{aligned}$$

Meqë  $x > 0$  (nga kushtet e fillimit) përfundojmë se  $x = 2$  është zgjidhja e kërkuar.

Të zgjidhen mosbarazimet eksponenciale dhe logaritmike:

**Detyra 23.**  $\log_{\frac{1}{2}} (5 + 4x - x^2) > -3$

**Zgjidhja.**

$$\log_{\frac{1}{2}} (5 + 4x - x^2) > -3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} (5 + 4x - x^2) > \log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2} \right)^{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 4x - x^2 < \left( \frac{1}{2} \right)^{-3} \\ 5 + 4x - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 4x - x^2 > 8 \\ 5 + 4x - x^2 < 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5+4x-x^2 > 0 \\ -x^2+4x+5-8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+4x+5 > 0 \\ -x^2+4x-3 < 0 \end{cases}$$

Duke zgjidhur barazimin  $-x^2+4x+5=0$  merret  $x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4(-1)5}}{-2} = \frac{-4 \pm 6}{-2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5$ .

Duke zgjidhur barazimin  $-x^2+4x-3=0$  merret  $x_{3/4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4(-1)(-3)}}{2(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$

$$\Rightarrow x_3 = 1, x_4 = 3.$$

Zgjidhja e mosbarazimit  $-x^2+4x+5 > 0$ , është  $x \in (-1, 5)$ , kurse zgjidhja e mosbarazimit  $-x^2+4x-3 < 0$  është  $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ .

Zgjidhja e mosbarazimit të fillimit që merret si prerje e tyre, është  $x \in (-1, 1) \cup (3, 5)$ .

**Detyra 24**  $\log_x(x-1) \geq 2$ .

**Zgjidhja.**

Dallojmë dy raste themelore:

I) Nëse baza  $> 1$ ;            II) Nëse baza është mes 0 e 1.

I) Nëse  $x > 1$ , atëherë

$$\log_x(x-1) \geq 2 \Leftrightarrow \log_x(x-1) \geq \log_x x^2 \Leftrightarrow (x-1) \geq x^2$$

si dhe kushti ndikues  $x-1 > 0$ .

$$\text{Pra kemi } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \geq x^2 \end{cases} \sim \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq 0 \end{cases}$$

Gjë që nuk është e mundur.

II) Nëse  $0 < x < 1 \Rightarrow \log_x(x-1) \geq 2 \Leftrightarrow \log_x(x-1) \geq \log_x x^2 \Leftrightarrow x-1 < x^2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0$  mosbarazim ky që vlen për çdo  $x \in \mathbb{R}$ , përkatësisht  $x \in (0, 1)$

Mirëpo kushtet e përkufizimit të funksionit  $\log_x(x-1)$ , na japin se kjo vlen vetëm për  $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$ .

Përfundojmë se mosbarazimi nuk ka zgjidhje.

## 4. Paraqitja grafike e funksioneve lineare, kuadratike, eksponentiale dhe logaritmike

Të paraqiten grafikisht funksionet:

**Detyra 25.**  $y = -2x + 3$ .

**Zgjidhja.**

Caktojmë dy pika të drejtëzës (figura 3).

$x$	0	1
$y = -2x + 3$	3	1

Merret  $A(0, 3)$ ,  $B(1, 1)$

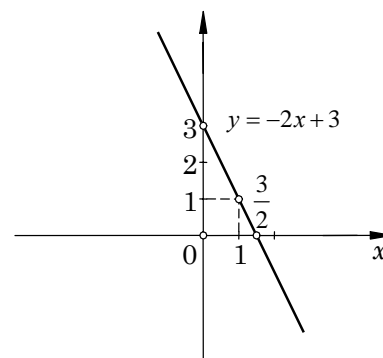


Figura 3

**Detyra 26.** a)  $y = x - 1 + \frac{x(x^2 - 4)}{|x^2 - 4|}$ ;      b)  $y = \frac{|x-1| + |x+1|}{2}$ ;      c)  $y = x - |x| + \frac{x-2}{|x-2|}$ .

**Zgjidhja.**

a) Funkcionin e dhënë e paraqesim në trajtën:

$$y = x - 1 + \frac{x(x-2)(x+2)}{|x-2||x+2|}.$$

Vërejmë se funksioni nuk është i përkufizuar në pikat  $x = \pm 2$ .

Tani funksionin e shqyrtojmë në rastet 1)  $x \in (-\infty, -2)$ ; 2)  $x \in (-2, 2)$ ; 3)  $x \in (2, +\infty)$ .

1) Nëse  $x \in (-\infty, -2)$  atëherë  $x-2 < 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$ ,  $x+2 < 0 \Rightarrow |x+2| = -(x+2)$ .

$$\text{Pra } y = x - 1 + \frac{x(x-2)(x+2)}{(-(x-2))(-(x+2))} = x - 1 + x = 2x - 1.$$

2) Nëse  $x \in (-2, 2)$ ; atëherë  $x-2 < 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$ ,  $x+2 > 0 \Rightarrow |x+2| = x+2$ .

$$\text{D.m.th. } y = x - 1 + \frac{x(x-2)(x+2)}{(-(x-2))(x+2)} = x - 1 - x = -1.$$

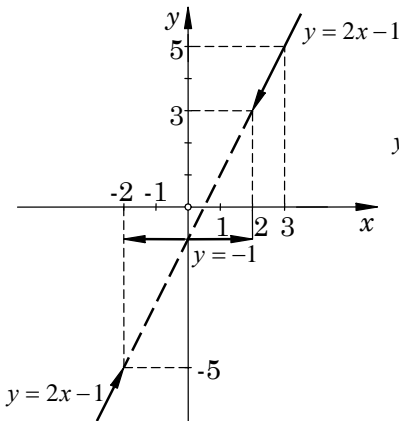
3) Nëse  $x \in (2, +\infty)$   $x-2 > 0 \Rightarrow |x-2| = x-2$ ;  $x+2 > 0 \Rightarrow |x+2| = x+2$ .

$$\text{D.m.th. } y = x - 1 + \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow y = x - 1 + x \Rightarrow y = 2x - 1.$$

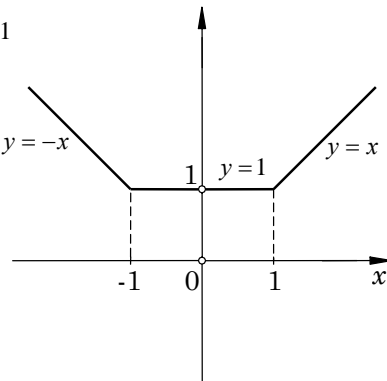
Paraqesim grafikisht funksionin  $y = \begin{cases} 2x-1, & x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ -1, & x \in (-2, 2) \end{cases}$  (figura 4)

$$b) y = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, -1] \\ 1, & x \in [-1, 1] \\ x, & x \in (1, +\infty) \end{cases} \quad (\text{figura 5})$$

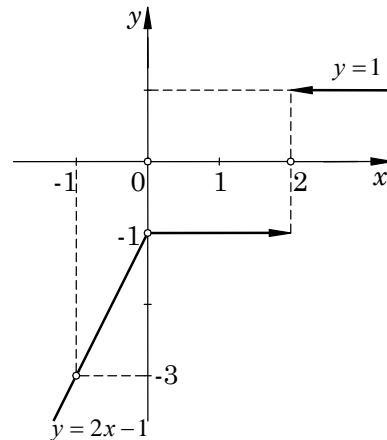
$$c) y = \begin{cases} -2x-1, & x \in (-\infty, 0] \\ -1, & x \in (0, 2) \\ 1, & x \in (2, +\infty) \end{cases} \quad (\text{figura 6})$$



**Figura 4**



**Figura 5**



**Figura 6**

**Detyra 27.** a)  $y = x^2 - 3|x|$ ;      b)  $y = x^2 + 2|x|$ ;      c)  $y = |x^2 - x| + x$ .

**Zgjidhja.**

a) Për  $x \geq 0$ ,  $|x| = x$  prandaj  $y = x^2 - 3x$ . Për  $x < 0$ ,  $|x| = -x$  prandaj  $y = x^2 + 3x$ .

$$\text{D.m.th. } y = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \geq 0 \\ x^2 + 3x, & x < 0 \end{cases}$$

Le të paraqesim së pari grafikun  $y = x^2 - 3x$ ,  $x \geq 0$ .

Zerot e grafikut janë:  $x=0$ ;  $x=3$ ;  $K\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$  (figura 7).

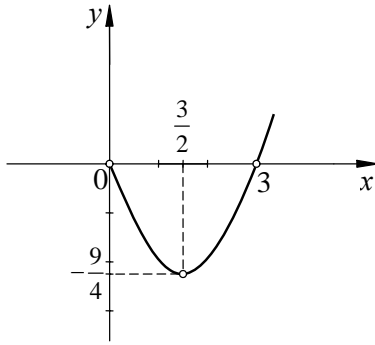


Figura 7

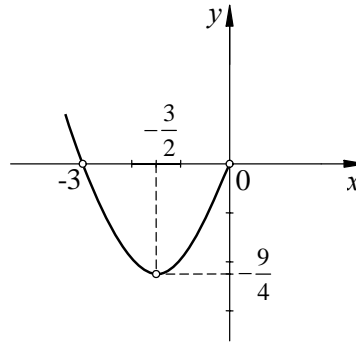


Figura 8

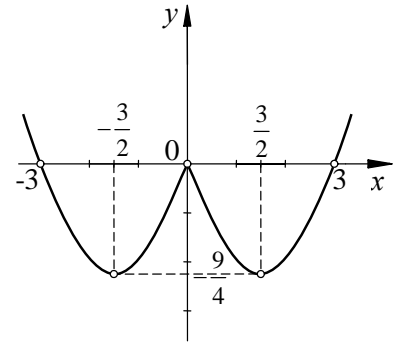


Figura 9

Paraqesim në vijim funksionin  $y = x^3 + 3x$ ;  $x < 0$ .

Zerot e funksionit  $x=0$ ;  $x=-3$  (por  $x < 0$  d.m.th. kemi vetëm  $x=-3$ ,  $K\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$  (figura 8).

Duke kombinuar grafikët e funksioneve (figura 7, 8) merret grafiku i funksionit (figura 9).

b) **Udhëzim.** Për  $x \geq 0$ ;  $|x|=x$ ;  $y = x^2 + 2x$ . Për  $x < 0$ ;  $|x|=-x$ ;  $y = x^2 - 2x$ . Pra  $y = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}$  (fig.10)

c) Funksionin e dhënë e paraqesim në trajtën

$$y = |x^2 - x| + x = |x(x-1)| + x = |x||x-1| + x.$$

Dallojmë rastet: 1)  $x \in (-\infty, 0]$ ; 2)  $x \in (0, 1]$ ; 3)  $x \in (0, +\infty)$ .

1) Nëse  $x \in (-\infty, 0]$ ;  $|x|=-x$ ;  $x-1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1) = 1-x$ . Merret  $y = -x(1-x) + x = -x + x^2 + x = x^2$ .

2) Nëse  $x \in (0, 1]$ ;  $|x|=x$ ;  $x-1 < 0 \Rightarrow |x-1| = 1-x$ . Merret  $y = x(1-x) + x = -x^2 + 2x$ .

3) Nëse  $x \in (0, +\infty)$ ;  $|x|=x$ ;  $x-1 > 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$ . Merret  $y = x(x-1) + x = x^2 - x + x = x^2$ .

D.m.th. kemi funksionin  $y = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty) \\ -x^2 + 2x, & x \in (0, 1] \end{cases}$  (figura 11)

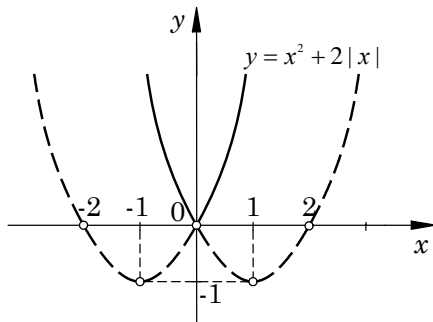


Figura 10.

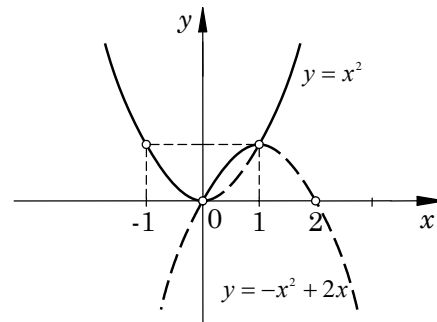


Figura 11.

**Detyra 28.** a)  $y = 2^{\sqrt{x^2}}$ ;

b)  $y = 2^{-\sqrt{x^2}}$ ;

e)  $y = |2^x - 1|$ ;

d)  $y = 2^{\frac{\sqrt{x^2}}{x}} - 2$ ;

e)  $y = 3^{x-|x|}$ ;

f)  $y = |2^{|x|} - 1|$ .

**Zgjidhja.**

a)  $y = 2^{\sqrt{x^2}} = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ 2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$  (fig.12)

b)  $y = 2^{-\sqrt{x^2}} = 2^{-|x|} = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ 2^x, & x < 0 \end{cases}$  (fig.13)

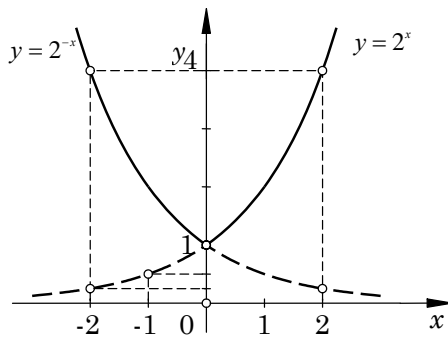


Figura 12

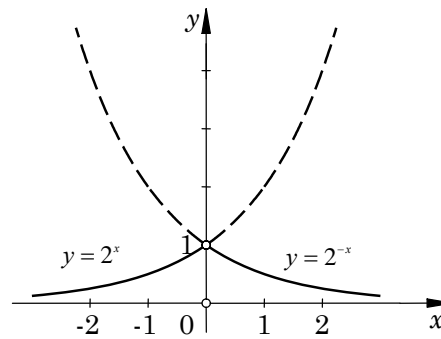


Figura 13

c) Së pari shprehjen  $2^x - 1$  e barazojmë me zero dhe caktojmë  $x$  - in. Është e qartë se  $2^x - 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$ .

D.m.th. detyrën duhet shqyrtuar sipas rasteve:

1) Nëse  $x \in (-\infty, 0]$  atëherë  $2^x - 1 \leq 0 \Rightarrow |2^x - 1| = -(2^x - 1) = 1 - 2^x$ .

2) Nëse  $x \in (0, +\infty)$  atëherë  $2^x - 1 > 0 \Rightarrow |2^x - 1| = 2^x - 1$ .

D.m.th. kemi funksionin (figura 14)  $y = \begin{cases} 1 - 2^x, & x \leq 0 \\ 2^x - 1, & x > 0 \end{cases}$

d)  $y = 2^{|x|} - 2 = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ 2^{-x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ 2^{-1}, & x < 0 \end{cases}$  (Funksioni i dhënë nuk është i përkufizuar në pikën  $x = 0$ )

(figura 15)

**Udhëzim.**

e) Për  $x \geq 0$ ;  $|x| = x$ , d.m.th.  $y = 3^{x-x} = 3^0 = 1$ . Për  $x < 0$ ;  $|x| = -x \Rightarrow y = 3^{2x} = 9^x$ .

f) Dallojmë rastet 1)  $x \geq 0$ ; 2)  $x < 0$ .

1) Nëse  $x \geq 0$  atëherë  $|x| = x$ , prandaj  $y = |2^x - 1|$ . Për  $x \geq 0$  edhe  $2^x - 1 \geq 0$  prandaj  $|2^x - 1| = 2^x - 1$ .

Pra  $y = 2^x - 1$ .

2) Nëse  $x < 0$ ;  $|x| = -x$ , prandaj  $y = |2^{-x} - 1|$ . Për  $x < 0$ ;  $2^{-x} - 1 > 0$  prandaj  $|2^{-x} - 1| = 2^{-x} - 1$ .

Pra  $y = 2^{-x} - 1$ .

D.m.th.  $y = \begin{cases} 2^x - 1, & x \geq 0 \\ 2^{-x} - 1, & x < 0 \end{cases}$

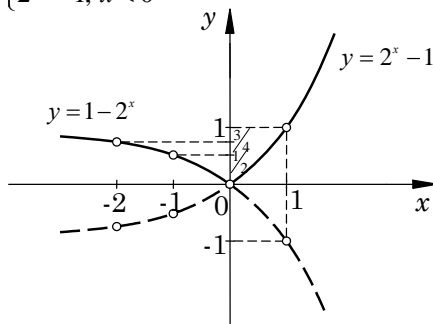


Figura 14

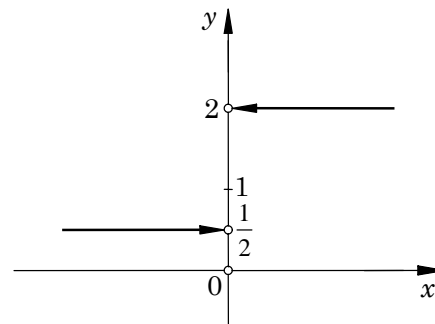


Figura 15

**Detyra 29.** a)  $y = \log_2 x - 1$ ; b)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$ ; c)  $y = \log_2(x + 1)$ .

**Zgjidhja.**

a)

$x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$y = \log_2 x - 1$	1	0	-1	-2	-3

b)

$x$	3	1	$\frac{1}{3}$
$y = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$	0	1	2

c)

$x$	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$
$y = \log_2(x+1)$	2	1	0	-1	-2

Grafikët e funksioneve janë paraqitur në figurat 16, 17, 18, përkatësisht

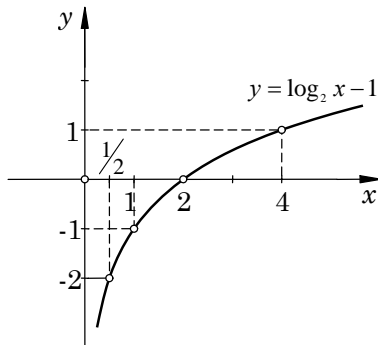


Figura 16

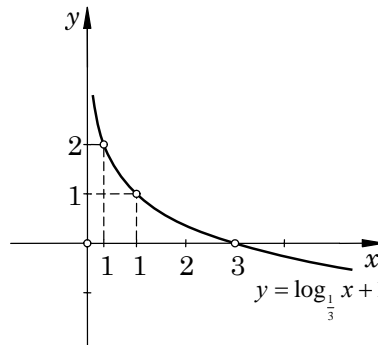


Figura 17

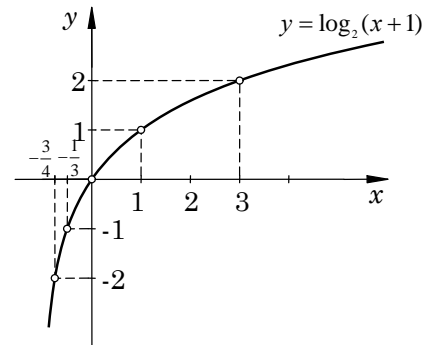


Figura 18

## 5. Trigonometria

**Përkufizimi 1.** Masa e një këndi  $\theta$  e shprehur në radian jepet me formulën  $\theta = \frac{l}{r}$  (radian) ku  $l$  është gjatësia e harkut rrethor që i përgjigjet këndit qendror dhe  $r$  është rrezja e rrethit. (shih figurën 19).

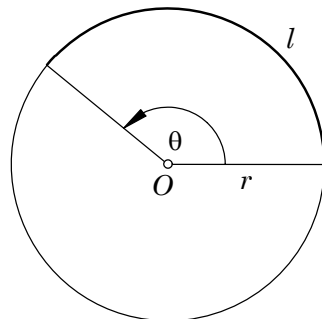


Figura 19

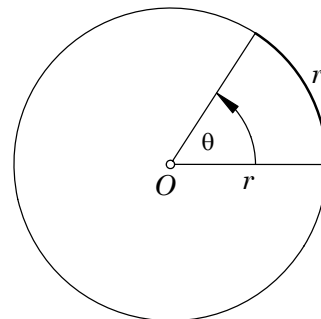


Figura 20

Le të shprehim këndin  $360^\circ$  në radian. Në këtë rast  $l$  është perimetri i rrethit, pra  $l = 2 \cdot \pi \cdot r$ , kështu  $\theta = \frac{l}{r} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} = 2\pi$ . Pra  $360^\circ = 2\pi$  radian, d.m.th.  $180^\circ = \pi$  radian.

**Shënimi 1.** Shohim se për  $l = r$  kemi këndin  $\theta = 1$  radian, pra mund të themi:

*Këndi me kulm në qendër të rrethit, gjatësia e harkut të të cilit është e barabartë me rrezën e rrethit është 1 radian (shih figurën 20).*

**Shënimi 2.** Nga ajo që u tha më sipër tregohet lehtë se për të shndërruar këndin nga shkallët në radian, atë e shumëzojmë me  $\frac{\pi}{180^\circ}$ , pra  $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$  ( $\alpha$  është këndi i dhënë i shprehur



**Detyra 35.** Të vërtetohet identiteti  $\frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} - 2\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 1 = 0$ .

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} - 2\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 1 &= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}} - 2 + 1 \\ &= 1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}} - 1 = \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 1 = 0. \end{aligned}$$

**Detyra 36.** Të thjeshtohet shprehja  $\frac{\sin 750^\circ \cdot \cos 390^\circ \cdot \operatorname{tg} 1140^\circ}{\operatorname{ctg} 405^\circ \cdot \sin 1860^\circ \cdot \cos 780^\circ}$ .

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} \frac{\sin 750^\circ \cos 390^\circ \operatorname{tg} 1140^\circ}{\operatorname{ctg} 405^\circ \sin 1860^\circ \cos 780^\circ} &= \frac{\sin(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) \cos(360^\circ + 30^\circ) \operatorname{tg}(3 \cdot 360^\circ + 60^\circ)}{\operatorname{ctg}(360^\circ + 45^\circ) \sin(5 \cdot 360^\circ + 60^\circ) \cos(2 \cdot 360^\circ + 60^\circ)} \\ &= \frac{\sin 30^\circ \cos 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{ctg} 45^\circ \sin 60^\circ \cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Të zgjidhen barazimet dhe mosbarazimet trigonometrike:

**Detyra 37.**  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ .

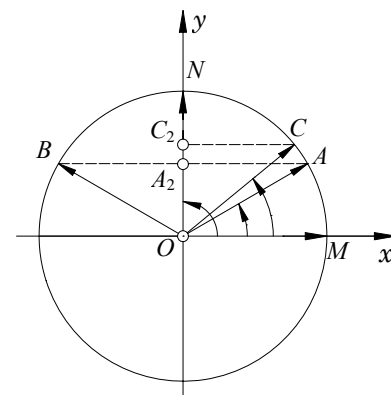
**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \Leftrightarrow \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} + \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x &= \cos^2 x \text{ sepse } \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} = \cos^2 x\right) \\ \Leftrightarrow \cos x - \cos^2 x = 0 &\Leftrightarrow \cos x(1 - \cos x) = 0 \\ \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 1 - \cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = 2n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Detyra 38.** a)  $\sin x > \frac{1}{2}$  në  $(0, 2\pi)$ ; b)  $\sin x > \frac{1}{2}$ ; c)  $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; d)  $\operatorname{ctg} x > 2$ ; e)  $\operatorname{tg} x > 1$ .

**Zgjidhja.**

a) Nga figura shihet se  $\sin \frac{\pi}{6} = OA_2 = \frac{1}{2} = \sin \frac{5\pi}{6}$ , kurse  $\sin(\vec{OM}, \vec{OC}) = OC_2 > \frac{1}{2}$ . Këndi  $(\vec{OM}, \vec{OC})$  është njëri ndër këndet e intervalit  $(0, 2\pi)$  që plotëson mosbarazimin e dhënë. Rreze vektorët, që pikën e fillimit e kanë në  $O$  e pikën e mbarimit në harkun  $ANB$  me boshtin  $Ox$  formojnë kënde me vlerë më të madhe se këndi  $\frac{\pi}{6}$  por më të vogël se këndi  $\frac{5\pi}{6}$ . Pra  $\sin x > \frac{1}{2}$  për  $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ .



**Figura 22**

b) Duke pasur parasysh se funksioni trigonometrik  $\sin x$  është funksion periodik me periodë  $2\pi$ ,

rrjedh se zgjidhjet gjenden në  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

c)  $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$ . d)  $x \in (k\pi, \text{arctg}2 + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . e)  $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Detyra 39.**  $\sin x > \sin 3x$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ .

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} \sin x > \sin 3x &\Leftrightarrow \sin x - \sin 3x > 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x+3x}{2} \sin \frac{x-3x}{2} > 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x \sin(-x) > 0 \Leftrightarrow -2 \sin x \cos 2x > 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x \cos 2x < 0 \Leftrightarrow (\sin x > 0 \wedge \cos 2x < 0) \vee (\sin x < 0 \wedge \cos 2x > 0) \\ &\Leftrightarrow \left(x \in (0, \pi) \wedge 2x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right) \vee \left(x \in (\pi, 2\pi) \wedge 2x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x \in (0, \pi) \wedge x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)\right) \vee \left(x \in (\pi, 2\pi) \wedge x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)\right) \\ &\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

**Detyra 40.** Të vërtetohet mosbarazia  $\frac{\sin^{n+2} x + \cos^{n+2} x}{\cos^n x + \sin^n x} > 1$  për  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  dhe  $n \in \mathbb{N}$ .

**Zgjidhja.**

Mosbarazinë e shkruajmë në formën

$$\begin{aligned} \frac{\sin^{n+2} x + \cos^{n+2} x}{\cos^n x + \sin^n x} &\geq \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \frac{\sin^n x}{\cos^n x} \sin^2 x + \frac{\cos^n x}{\sin^n x} \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x \geq 0 \\ \sin^2 x (\text{tg}^n x - 1) + \cos^2 x (\text{ctg}^n x - 1) &\geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x (\text{tg}^n x - 1) - \frac{\cos^2 x}{\text{tg}^n x} (\text{tg}^n x - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{D.m.th. } \sin^2 x (\text{tg}^n x - 1) \cdot \text{tg}^n x - \cos^2 x (\text{tg}^n x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (\text{tg}^n x - 1) \cdot (\text{tg}^{n+2} x - 1) \geq 0.$$

Mosbarazia e fundit është e vërtetë, sepse  $\text{tg}^n x$  dhe  $\text{tg}^{n+2} x$  janë njëkohësisht të barabartë me një, më të mëdhenjë se një ose më të vegjël se një.

P.sh. Le të tregojmë se nëse  $\text{tg}^n x \geq 0$  atëherë  $\text{tg}^{n+2} x \geq 0$ . Supozojmë të kundërtën, pra se  $\text{tg}^{n+2} x < 0$ . Atëherë  $\text{tg}^{n+2} x = \text{tg}^n x \cdot \text{tg}^2 x < 0$ . Meqë  $\text{tg}^n x > 0$  mbetet që  $\text{tg}^2 x < 0$  që paraqet kontradiksion. Ngjashëm tregohen edhe rastet tjera.

**Detyra 41.** Të vërtetohet se nëse  $x_1 \neq x_2$  dhe  $x_1, x_2 \in (0, \pi)$ , atëherë vlen  $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}$ .

**Zgjidhja.**

Shqyrtojmë ndryshimin

$$\begin{aligned} \sin \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} &= \sin \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \cos \frac{x_1 - x_2}{2}}{2} = \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \left(1 - \cos \frac{x_1 - x_2}{2}\right) \\ &= 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \sin^2 \frac{x_1 - x_2}{4}. \end{aligned}$$

Kur  $x_1 \in (0, \pi)$  dhe  $x_2 \in (0, \pi)$  atëherë edhe  $\frac{x_1 + x_2}{2} \in (0, \pi)$  kështu që  $2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$ .

Pra vlen  $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} > 0$ , d.m.th.  $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}$ .