

I. INDUKSIONI MATEMATIKË

Pse Induksioni Matematik?

Pse na nevojitet induksioni matematik? A nuk mjaftojnë 2,3,4,5,...,100,...,1000000 raste për të “dëshmuar” saktësinë e një pohimi? A mund të ndodh që një pohim të vlejë për pesë rastet e para e të mos vlejë për rastet tjera? Po nëse themi se pohimi vlen për 100 rastet e shqyrtuara, pse të mos konkludojmë se pohimi vlen për çdo numër.

Në vijim, me anë të disa shembujve do të tregojmë se në vërtetimet matematike “*Nuk mjaftojnë vetëm disa raste të shqyrtuara*”.

Të fillojmë, të shohim se si gaboi Ferma, një matematikan i madh i shekullit XVIII, duke menduar se vetëm disa raste të shqyrtuara mjaftojnë për të dhënë një konkludim.

Shembulli 1. Në vitin 1653, Ferma, formuloi pohimin:

Të gjitha numrat e trajtës $2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ janë numra të thjeshtë.

Pohimin e tij Ferma e arsyetoi si vijon:

$$n = 0, 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$$

$$n = 1, 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$n = 2, 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$$

$$n = 3, 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$$

$$n = 4, 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65536 + 1 = 65537.$$

Ndonëse për numrat tjerë $n = 5, 6, 7, \dots$ Ferma nuk arriti as të vërtetoi e as të mohoi pohimin.

Por si duket ai i mjaftuar vetëm 5 raste për të dhënë një “përfundim” i cili ka qenë i gabuar.

Gaussi, tregoi se numri $2^{2^5} + 1$ nuk është i thjeshtë.

Numri $2^{2^5} + 1$ plotpjesëtohet me 641.

Shembulli 2. Është dhënë polinomi

$$f(n) = n^5 - 15n^4 + 85n^3 - 224n^2 + 274n - 120.$$

Për çdo $n \in N$, $f(n) = n^2$.

Shtrohet pyetja. A është e saktë pohimi i mësipërm?

Le të provojmë për $n = 1$. Merret:

$$f(1) = 1^5 - 15 \cdot 1^4 + 85 \cdot 1^3 - 224 \cdot 1^2 + 274 \cdot 1 - 120 = 1^2.$$

Vazhdojmë tutje për $n = 2$. Merret

$$f(2) = 2^5 - 15 \cdot 2^4 + 85 \cdot 2^3 - 224 \cdot 2^2 + 274 \cdot 2 - 120 = 4 = 2^2.$$

Edhe këtë herë pamë se pohimi është i saktë.

Nëse vazhdojmë të provojmë për $n = 3$ do t marrim

$$f(3) = 9 = 3^2.$$

Dikush që ka durim më tepër mund të provojë se $f(4) = 16 = 4^2$ dhe se $f(5) = 25 = 5^2$.

Do të ketë të atillë që në bazë të rasteve të verifikuara të konkludojmë se vërtetë $f(n) = n^2$.

Por një gjë e tillë është e pasaktë sepse për $n = 6$ merret:

$$f(6) = 6^5 - 15 \cdot 6^4 + 85 \cdot 6^3 - 224 \cdot 6^2 + 274 \cdot 6 - 120 = 156.$$

Pra $f(6) = 156$ e jo 36 ashtu siç “pritej”

Njehsimet tjera tregojnë se:

$$f(7) = 769; f(8) = 5104 \text{ etj.}$$

Pra, pohimi ynë ishte i saktë vetëm për $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Në fakt pohimi të cilin e shqyrtuam është zbërthimi i polinomit $f(n) = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + n^2$ për $n = 1$, është e qartë se $f(1) = 0 + 1^2 = 1^2$ sepse për $n = 1$, $n-1 = 0$ dhe kështu i tërë prodhimi $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 0$.

Ngjashëm për $n = 2$, $n-2 = 0$, $f(2) = 0 - 2^2 = 2^2, \dots$

Ky shembull na jep idenë që të marrim një shembull tjetër:

Supozojmë se kemi polinomin,

$$g(n) = (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-100) + n^2$$

të cilin e zbërthejmë dhe shtrojmë hipotezën se për çdo $n \in N$, $g(n) = n^2$.

Nëse do të fillonim të provonim do të merrnim

$$g(1) = 1^2; g(2) = 2^2; \dots, g(100) = 100^2.$$

Por $g(101) = 100! + 101^2 \neq 101^2$.

Prandaj, edhe nëse kemi 100 konfirmime të njëpasnjëshme nuk mund të konkuludojmë saktësinë e një pohimi.

Kjo na bënë të kuptojmë pse pohimi duhet ta verifikojmë për të gjitha rastet e mundshme e jo vetëm për disa (qofshin ato *miliona raste!*).

Për këtë zbatohet *metoda e induksionit matematik*, që paraqet një formë të rëndësishme të konkludimit në lëmin e matematikës; dhe që jepet me këtë parim:

1. Pohimi P është i vërtetë për numrin natyror 1.
2. Nëse prej supozimit se pohimi P është i vërtetë për çfarëdo numri natyrorë n , rrjedhë se pohimi P është i vërtetë edhe për numrin natyror $n+1$ atëherë përfundojmë se pohimi P është i vërtetë për çdo numër natyror.

Në detyrat vijuese do të zbatojmë *metodën e induksionit matematik*.

Detyra 1. Të vërtetohet me anë të induksionit matematik se vlen

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zgjidhja.

Le të jetë $n=1$. Ana e majtë e barazimit është e barabartë me 1. Le të shohim anën e djathtë.

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

Pra për $n=1$, pohimi është i saktë.

Le të supozojmë se pohimi është i saktë kur n është i barabartë me numrin e çfarëdoshëm k , pra kur $n=k$.

D.m.th. supozojmë se vlen:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \quad (\text{hi})$$

Ky supozim quhet *Hipoteza induktive*.

Tani, në bazë të parimit të induksionit matematik duhet të tregojmë se pohimi është i saktë edhe për $n=k+1$.

Nëse $n=k+1$, ana e majtë është e barabartë me:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1). \quad (1)$$

e zbatojmë hipotezën induktive për të zëvendësuar shprehjen $1 + 2 + 3 + \dots + k$ me $\frac{k(k+1)}{2}$ në shprehjen (1).

Pra, kemi:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Për të kompletuar vërtetimin, duhet të tregojmë se $\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$ është e barabartë me shprehjen në anën e djathtë të barazimit të dhënë në fillim, kur në vend të numrit n zëvendësojmë $k+1$.

Vërtetë,

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) &= (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = (k+1) \left(\frac{k+2}{2} \right) \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}, \text{ gjë që duhej treguar.} \end{aligned}$$

Detyra 2. Të vërtetohet me anë të induksionit matematik se vlen:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

Zgjidhja.

Për $n=1$ kemi:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2 \cdot 1 + 3}{4 \cdot 3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Pra, pohimi është i saktë.

Supozojmë se pohimi është i saktë për $n=k$. Pra, supozojmë se vlen:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{h}{3^h} = \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k}. \quad (\text{hi})$$

Tregojmë se pohimi vlen për $n=k+1$, pra duhet të tregojmë se kemi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{k}{3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} &= \frac{3}{4} - \frac{2(k+1)+3}{4 \cdot 3^{k+1}} \\ \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{k}{3^k}}_{\text{hi}} + \frac{k+1}{3^{k+1}} &= \underbrace{\frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k}}_{\text{hi}} + \frac{k+1}{3^{k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} - \left(\frac{2k+3}{4 \cdot 3^k} - \frac{k+1}{3^{k+1}} \right) \\
&= \frac{3}{4} - \left(\frac{3(2k+3) - 4(k+1)}{4 \cdot 3^{k+1}} \right) \\
&= \frac{3}{4} - \left(\frac{6k+9-4k-4}{4 \cdot 3^{k+1}} \right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{2k+5}{4 \cdot 3^{k+1}} \\
&= \frac{3}{4} - \frac{2k+2+3}{4 \cdot 3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2(k+1)+3}{4 \cdot 3^{k+1}},
\end{aligned}$$

gjë që duhej treguar.

Detyra për ushtrime të pavarura

Duke zbatuar *induksionin matematik*, të vërtetohet pohimet:

1. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
2. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.
3. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.
4. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
5. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.
6. $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$.
7. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
8. $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$, ku $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.
9. $\sum_{i=1}^n c = n \cdot c$, ku c është konstante.

10. $\sum_{i=1}^n (a_i + c) = \sum_{i=1}^n a_i + n \cdot c$, ku c është konstante.
11. $\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i$, ku c është konstante.
12. $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m b_j$.
13. $\prod_{i=1}^n a_i b_i = \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i$, ku $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.
14. $\prod_{i=1}^n c = c^n$.
15. $\prod_{i=1}^n c \cdot a_i = c^n \prod_{i=1}^n a_i$.
16. $\prod_{i=1}^n a_i^2 = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^2$.
17. $\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$.
18. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$.
19. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.
20. $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$.
21. $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.
22. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)$.
23. $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)(2n^2+2n-1)$.
24. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.
25. $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$.
26. $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{1-x} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

27. Tregoni se $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$ është katror i plotë.

$$28. \prod_{i=1}^n (a_i + b_i) \geq \prod_{i=1}^n a_i + \prod_{i=1}^n b_i, \quad a_i, b_i \geq 0, a_i, b_i \in \mathbb{Z}.$$

$$29. \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i \right), \quad a_i, b_i \geq 0, a_i, b_i \in \mathbb{Z}.$$

Detyra 3. Të vërtetohet se vlen

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2n - 1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Zgjidhja.

Edhe në këtë rast do të zbatojmë induksionin matematik.

Pohimi është i qartë për $n = 1$.

Supozojmë se pohimi vlen për $n = k$.

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2k - 1)x = \frac{\sin^2 kx}{\sin x}. \quad (\text{hi})$$

Tregojmë se pohimi vlen për $n = k + 1$. Pra, tregojmë se vlen:

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2k - 1)x + \sin(2k + 1)x = \frac{\sin^2(k + 1)x}{\sin x}.$$

Vërtetë,

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2k - 1)x + \sin(2k + 1)x &= \frac{\sin^2 kx}{\sin x} + \sin(2k + 1)x \\ &= \frac{\sin^2 kx + \sin x \cdot \sin(2k + 1)x}{\sin x} \\ &= \frac{\sin^2 kx + \frac{1}{2} \cos(2kx) - \cos(2k + 2)x}{\sin x} \\ &= \frac{2\sin^2 kx + \cos^2 kx - \sin^2 kx - \cos(2k + 2)x}{2\sin x} \\ &= \frac{1 - \cos(2k + 2)x}{2\sin x} = \frac{2\sin^2(k + 1)x}{2\sin x} = \frac{\sin^2(k + 1)x}{\sin x}, \end{aligned}$$

gjë që duhej treguar.

Shënim. Gjatë vërtetimit zbatuam formulat:

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)); \quad 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x.$$

Detyra për ushtrime të pavarura

$$30. \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

$$31. \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

$$32. \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

$$33. \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

$$34. \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$$

Detyra 4. Të tregohet se $3^{2n+2} - 8n - 9 \equiv 0 \pmod{64}$

Zgjidhja.

Së pari do të përkujtojmë se shënimi $a \equiv b \pmod{m}$ nënkupton se $a - b$ plotpjesëtohet me m .

Shënimi lexohet: a kongruent me b sipas modulit m .

Le të jetë $n = 1$. Kemi:

$$3^{2 \cdot 1 + 2} - 8 \cdot 1 - 9 = 3^4 - 17 = 81 - 17 = 64 \equiv 0 \pmod{64}$$

$$(\text{sepse } 64 - 0 = 64 : 64).$$

Le të provojmë p.sh. për $n = 2$.

$$3^{2 \cdot 2 + 2} - 8 \cdot 2 - 9 = 3^6 - 16 - 9 = 729 - 25 = 704 = 11 \cdot 64 \equiv 0 \pmod{64}$$

$$(\text{sepse } 11 \cdot 64 - 0 = 11 \cdot 64 : 64).$$

Supozojmë se pohimi është i saktë për n . Pra, se vlen:

$$3^{2n+2} - 8n - 9 \equiv 0 \pmod{64}. \quad (\text{hi})$$

Tregojmë se pohimi është i saktë për $n + 1$.

Kemi:

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+2} - 8(n+1) - 9 &= 3^{2n+2} \cdot 3^2 - 8n - 8 - 9 \\ &= 9 \cdot 3^{2n+2} - 8n - 17 \end{aligned} \quad (1)$$

$$= 9(3^{2n+2} - 8n - 9) + 64n + 64 \quad (2)$$

$$= 9(3^{2n+2} - 8n - 9) + 64(n+1) \equiv 0 \pmod{64} \quad (3)$$

Le të sqarojmë shprehjet (2) dhe (3).

Gjatë zbatimit të induksionit matematik, ideja kyçe është që të zbatohet hipoteza induktive.

Kështu shprehja në kllapa duhet të paraqes shprehje tek hipoteza induktive.

Nëse shumëzojmë $9(3^{2n+2} - 8n - 9)$ kemi:

$$9 \cdot 3^{2n+2} - 72n - 81 \quad (*)$$

Por shprehja paraprake ka qenë

$$9 \cdot 3^{2n+2} - 8n - 17 \quad (**)$$

Kështu që (*) të jetë i barabartë me shprehjen (**) duhet që shprehjes (*) t'i shtrohet $64n + 64$.

Në këtë mënyrë kemi arritur në (1) tek (2).

Shprehja (3) është arritur si vijon:

Është e qartë se

$$9(3^{2n+2} - 8n - 9) \equiv 0 \pmod{64}.$$

Po ashtu

$$64(n+1) \equiv 0 \pmod{64}.$$

Në bazë të vetisë:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{array} \right\} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

merret

$$9(3^{2n+2} - 8n - 9) + 64(n+1) \equiv 0 \pmod{64}$$

gjë që duhej treguar.

Detyra 5. Le të jetë k numër tek. Të vërtetohet se për çdo numër natyror n , $k^{2^n} - 1$ plotpjesëtohet me 2^{n+2} .

Zgjidhja.

Për $n = 1$ kemi:

$$k^{2^1} - 1 = k^2 - 1 = (k-1)(k+1) : 2^{1+2} = 8.$$

Vërtetë, meqë k është numër tek atëherë $k = 2k_1 + 1$.

Prandaj

$$(k-1)(k+1) = (2k_1+1-1)(2k_1+1+1) = 2k_1 \cdot 2(k_1+1) = 4k_1 \cdot (k_1+1) : 8$$

sepse njëri nga numrat $k_1, k_1 + 1$ është numër çift, andaj plotpjesëtohet me 2.

Supozojmë se pohimi është i saktë për n . Prandaj,

$$k^{2^n} - 1 : 2^{n+2} \quad (\text{hi})$$

Tregojmë se pohimi vlen për $n+1$, pra se:

$$k^{2^{n+1}} - 1 : 2^{n+3}$$

Vërtetë

$$k^{2^{n+1}} - 1 = k^{2^n \cdot 2} - 1 = (k^{2^n})^2 - 1 = (k^{2^n} - 1)(k^{2^n} + 1)$$

Në bazë të hipotezës induktive

$$k^{2^n} - 1 : 2^{n+2} \quad (1)$$

Meqë k është numër tek, k^{2^n} është numër tek, prandaj $k^{2^n} + 1$ është numër çift, prandaj

$$k^{2^n} + 1 : 2 \quad (2)$$

Nga (1) dhe (2) kemi:

$$(k^{2^n} - 1)(k^{2^n} + 1) : 2^{n+2} \cdot 2 = 2^{n+3}, \text{ gjë që duhej treguar.}$$

Detyra për ushtrime të pavarura

35. $3^{2^n} - 1 \equiv 0 \pmod{8}$.

36.

$$3 \cdot 5^{2^{n+1}} + 2^{3^{n+1}} \equiv 0 \pmod{17}.$$

37. $2^{2^{n+1}} - 9n^2 + 3n - 2 \equiv 0 \pmod{54}$.

38. $(4^{2^{n+2}} - 15n - 16) : 225$.

39. $(3^{2^{n+1}} + 2^{n+2}) : 7$.

40. $(3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4) : 9$.

41. $(2^{3^{n+2}} - 28n - 4) : 196$.

42. Vërtetoni se $133 \mid 11^{n+1} + 12^{(2n-1)}$.

43. Tregoni se $11 \cdot 3^n + 3 \cdot 7^n - 6$ plotpjesëtohet me 8.

44. Tregoni se $f(n) = 3^{2^n} - 1$ plotpjesëtohet me 2^{n+1} por jo me 2^{n+3} ($n \geq 1$).

Detyra 6. Të vërtetohet se vlen:

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} \cdot b^m,$$

ku $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $n! = n(n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ dhe sipas përkufizimit $0! = 1$.

Zgjidhja.

Për $n = 1$, kemi:

$$\begin{aligned} (a + b)^1 &= \sum_{m=0}^1 \binom{1}{m} a^{1-m} \cdot b^m = \binom{1}{0} a^{1-0} \cdot b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} \cdot b^1 \\ &= \frac{1!}{0!(1-0)!} a + \frac{1!}{1!(1-1)!} b = a + b. \end{aligned}$$

Supozojmë se pohimi vlen për n . Pra

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} \cdot b^m \quad (\text{hi})$$

Tregojmë se pohimi vlen për $n + 1$, pra se vlen:

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} a^{n+1-m} \cdot b^m.$$

Vërtetë,

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} \cdot b^m \\ &= a \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} b^m + b \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} \cdot b^m \\ &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n+1-m} b^m + b \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} \cdot b^{m+1} \\ &= \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n+1-m} b^m + b \sum_{m=1}^{n+1} \binom{n}{m-1} a^{n+1-m} \cdot b^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{0} a^{n+1-0} \cdot b^0 + \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} a^{n+1-m} b^m + b \sum_{m=1}^n \binom{n}{m-1} a^{n+1-m} \cdot b^m + a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{m=1}^m \left(\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} \right) a^{n+1-m} b^m + 0^{n+1} \quad (*)
\end{aligned}$$

Le të shqyrtojmë shprehjen:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-(m-1))!} \\
&= \frac{n!}{m(m-1)!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)(n-m)!} \\
&= \frac{n!(n-m+1+m)}{m(m-1)!(n-m+1)(n-m)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{m!(n+1-m)!} = \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} = \binom{n+1}{m}.
\end{aligned}$$

Duke zëvendësuar shprehjen e fundit në (*) dhe duke ditur se

$$\binom{n+1}{0} = 1, \quad \binom{n+1}{n+1} = 1 \text{ merret:}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{m=1}^n \binom{n+1}{m} a^{n+1-m} b^m + b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{m=1}^n \binom{n+1}{m} a^{n+1-m} b^m + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} \\
&= \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} a^{n+1-m} b^m, \text{ gjë që duhej treguar.}
\end{aligned}$$

Detyra 7. Të vërtetohet se për a_1, a_2, \dots, a_n pozitiv vlen mosbarazia e Koshit

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Zgjidhja.

Për $n = 2$. Duhet të tregojmë se $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$.

Meqë $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ kemi:

$$a_1 - 2\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} + a_2 \geq 0 \text{ prej nga } \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}.$$

Supozojmë se pohimi vlen për $n = k$, pra se vlen:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} \quad (\text{hi})$$

Duhet të tregojmë se pohimi vlen për $n = k + 1$, pra se vlen:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1}} \quad (1)$$

Le të shënojmë $a_1 + a_2 + \dots + a_k = A$.

Është e qartë se: $A \geq k \cdot \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k}$, prej nga

$$\frac{A + a_{k+1}}{k+1} \geq \frac{k \cdot \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} + a_{k+1}}{k+1} \quad (2)$$

Relacioni (1) mund ta shkruajmë:

$$\frac{A + a_{k+1}}{k+1} - \sqrt[k+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1}} \geq 0 \quad (3)$$

Pra, mjafton të tregojmë mosbarazinë (3).

Le të marrim këto zëvendësime:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = x^{k(k+1)}$$

$$a_{k+1} = y^{k+1}.$$

Kemi:

$$\begin{aligned} \frac{A + a_{k+1}}{k+1} - \sqrt[k+1]{x^{k(k+1)} \cdot y^{k+1}} &\geq \frac{k \sqrt[k]{x^{k(k+1)}} + y^{k+1}}{k+1} - \sqrt[k+1]{x^{k(k+1)} \cdot y^{k+1}} \\ &= \frac{k \cdot x^{k+1} + y^{k+1}}{k+1} - x^k \cdot y = \frac{k \cdot x^{k+1} + y^{k+1} - k \cdot x^k \cdot y - x^k \cdot y}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} (k \cdot x^k (x - y) - y(x^k - y^k)) \\ &= \frac{1}{k+1} (k \cdot x^k (x - y) - y(x - y)(x^{k-1} + x^{k-2} \cdot y + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1})) \\ &= \frac{x - y}{k+1} (kx^k - y(x^{k-1} + x^{k-2} \cdot y + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x-y}{k+1} (x^k - x^{k-1}y + x^k - x^{k-2} \cdot y + \dots + x^k + y^k) \\
&= \frac{x-y}{k+1} (x^{k-1}(x-y) + x^{k-2}(x^2 - y^2) + \dots + (x-y)(x^{k-1} + \dots + y^{k-1})) \\
&= \frac{(x-y)^2}{k+1} (x^{k-1} + x^{k-2}(x+y) + \dots + y^{k-1}) \geq 0
\end{aligned}$$

sepse $(x-y)^2 \geq 0$, $k+1 > 0$ si dhe $x^{k-1} + x^{k-2}(x+y) + \dots + y^{k-1} > 0$, gjë që duhej treguar.

Shënim. Shenja e barazimit vlen nëse $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Detyra 8. Të vërtetohet mosbarazia e Bernulit:

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n,$$

ku x_1, x_2, \dots, x_n janë numra real të tillë që $x_i > -1$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dhe x_i janë me shenja të njëjta.

Zgjidhja.

Pohimi është i saktë për $n=1$.

Le të jetë $n=2$. Duhet të tregojmë se $(1+x_1)(1+x_2) \geq 1+x_1+x_2$.

Vërtetë $(1+x_1)(1+x_2) = 1+x_1+x_2+x_1x_2 \geq 1+x_1+x_2$, sepse $x_1 \cdot x_2 \geq 0$.

Supozojmë se pohimi është i saktë për $n=k$.

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_k) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_k. \quad (\text{hi})$$

Tregojmë se pohimi vlen për $n=k+1$

$$\begin{aligned}
(1+x_1)(1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_k)(1+x_{k+1}) &\geq (1+x_1+\dots+x_k)(1+x_{k+1}) \\
&= 1+x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1}+x_{k+1}(x_1+x_2+\dots+x_k) \\
&\geq 1+x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1},
\end{aligned}$$

sepse $x_{k+1} \cdot (x_1+x_2+\dots+x_k) \geq 0$.

Shënim. Nëse në detyrën zëvendësojmë $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, $x > -1$ kemi:

$$\underbrace{(1+x)(1+x) \cdot \dots \cdot (1+x)}_n \geq 1 + \underbrace{x+x+\dots+x}_n$$

Pra $(1+x)^n \geq 1+nx$, ($n > 1$).

Kur vlen shenja e barazimit?

Detyra 9. Të vërtetohet mosbarazia $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, $n > 1$.

Zgjidhja.

Për $n = 2$, kemi:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} > \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Supozojmë se pohimi vlen për $n = k+1$, $k \in N$, pra

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}. \quad (\text{hi})$$

Tregojmë se pohimi vlen për $n = k+2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{k+2}} &> \sqrt{k+1} + \frac{1}{\sqrt{k+2}} \\ &= \frac{\sqrt{k+1} \cdot \sqrt{k+2} + 1}{\sqrt{k+2}} > \frac{\sqrt{k+1} \cdot \sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+2}} = \frac{k+1+1}{\sqrt{k+2}} = \sqrt{k+2}, \end{aligned}$$

gjë që duhej treguar.

Detyra për ushtrime të pavarura

45. Të vërtetohet mosbarazia $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n+1} > \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Detyra 10. Nëse $a, b > 0$ janë numra të dhënë dhe nëse

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{a} \right), a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{b}{a_1} \right), \dots, a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}} \right)$$

$$\text{atëherë tregoni se } \frac{a_n - \sqrt{b}}{a_n + \sqrt{b}} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^n}, \quad (a_n \neq -\sqrt{b}), n \in N.$$

Zgjidhja.

Për $n = 1$, kemi

$$\frac{a_1 - \sqrt{b}}{a_1 + \sqrt{b}} = \frac{\frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{a} \right) - \sqrt{b}}{\frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{a} \right) + \sqrt{b}} = \frac{a^2 - 2a\sqrt{b} + b}{a^2 + 2a\sqrt{b} + b} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^2.$$

Tregojmë se vlen implikacioni:

$$\frac{a_1 - \sqrt{b}}{a_1 + \sqrt{b}} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^k} \Rightarrow \frac{a_{k+1} - \sqrt{b}}{a_{k+1} + \sqrt{b}} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^{k+1}}.$$

Meqë,

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1} - \sqrt{b}}{a_{k+1} + \sqrt{b}} &= \frac{\frac{1}{2} \left(a_k + \frac{b}{a_k} \right) - \sqrt{b}}{\frac{1}{2} \left(a_k + \frac{b}{a_k} \right) + \sqrt{b}} = \frac{a_k^2 - 2a_k\sqrt{b} + b}{a_k^2 + 2a_k\sqrt{b} + b} = \left(\frac{a_k - \sqrt{b}}{a_k + \sqrt{b}} \right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^k} \right)^2 = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^k \cdot 2} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^{k+1}}, \text{ gjë që duhej treguar.} \end{aligned}$$

Detyra 11. Numrat e Fibanoçit jepen me formulën rekurente:

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_{n-1} + f_n, n > 1.$$

Kështu, disa nga numrat e Fibanoçit janë:

$$0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Të vërtetohet se nëse $x^2 = x + 1$, për $x \geq 2$ kemi:

$$x^n = f_n \cdot x + f_{n-1}$$

Zgjidhja.

Për $n = 2$, kemi:

$$x^2 = f_2 \cdot x + f_1, \text{ është e saktë sepse } f_2 = 1, f_1 = 1.$$

Supozojmë se pohimi vlen për $n - 1$,

$$\text{Pra } x^{n-1} = f_{n-1}x + f_{n-2}. \quad (\text{hi})$$

Tregojmë se pohimi vlen për n . Kemi:

$$\begin{aligned} x^n &= x^{n-1} \cdot x = (f_{n-1} \cdot x + f_{n-2})x = f_{n-1} \cdot x^2 + f_{n-2} \cdot x \\ &= f_{n-1}(x+1) + f_{n-2}x = f_{n-1} \cdot x + f_{n-1} + f_{n-2} \cdot x \\ &= (f_{n-1} + f_{n-2})x + f_{n-1} = f_n x + f_{n-1}, \text{ gjë që duhej treguar.} \end{aligned}$$

Detyra për ushtrime të pavarura

Tregoni se për vargun e Fibonaçit vlejné pohimet:

46. f_{3n} është numër çift, $n \geq 1$.

47. $f_{4n} \div 3$, $n \geq 1$.

48. Le të jetë $k \geq 1$ dhe $x \geq 1$. Nëse $k | n$ atëherë $f_k | f_n$.
49. Për çdo $n \geq 1, m \geq 1$, $f_{m+n} = f_{m+1} \cdot f_n + f_m \cdot f_{n+1} - f_m \cdot f_n$.
50. Për çdo $n \geq 1$, $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$.
51. Për çdo $n \geq 2$, $f_{n-1} \cdot f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$.
52. Tregoni se nëse $n \geq 1$, f_n dhe f_{n+1} janë relativisht të thjeshtë.
53. Vërtetoni ose mohoni $(f_n, f_{n+2}) = 1, \forall n \geq 1$.
54. Vërtetoni ose mohoni $(f_n, f_{n+3}) = 1, \forall n \geq 1$.
55. $1 < \frac{f_{n+1}}{f_n} < 2, \forall n > 2$. 56.

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} - \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{f_{n-1}f_n}.$$

57. Le të jetë $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tregoni se

$$A_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

është numër natyror.

58. (Formula e Bineut) Tregoni se anëtari i n - të i vargut të numrave të

$$\text{Fibonaçit jepet me formulën } f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

- Detyra 12.** Le të jetë $F_n = 2^{2^n} + 1$ (numrat e Fermës). Të vërtetohet se

$$F_0 F_1 F_2 \cdots F_{n-1} = F_n - 2, \quad n > 0.$$

Zgjidhja.

$$F_0 = 3, F_1 = 5.$$

Pra $F_0 = F_1 - 2$. D.m.th. pohimi është i saktë për $n = 1$.

Supozojmë se pohimi vlen për $n = k$, pra se

$$F_0 F_1 F_2 \cdots F_{k-1} = F_k - 2 \tag{hi}$$

Tregojmë se pohimi vlen për $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} F_0 F_1 F_2 \cdots F_{k-1} \cdot F_k &= (F_k - 2) \cdot F_k = (2^{2^k} + 1 - 2)(2^{2^k} + 1) \\ &= (2^{2^k} - 1)(2^{2^k} + 1) = 2^{2^{k+1}} - 1 = 2^{2^{k+1}} + 1 - 2 = F_{k+1} - 2. \end{aligned}$$