II. VARGJET NUMERIKE

1. Përkufizimi i vargut.

Le të jetë $N=\{1,2,3,...,n,...\}$ bashkësia e *numrave natyrorë*.

Sipas ndonjë *rregulle* ose *ligji*, *numrit natyror* 1 i shoqërojmë *numrin real* a_1, numrit 2 – *numrin real* a_2 e kështu me radhë.

Në përgjithësi, numrit n i shoqërojmë një numër real, që e shënojmë me a_n dhe kështu procesi vazhdon pafundësisht.

Si rezultat fitohet *vargu numerik*

$$a_1, a_2, ..., a_n, ... \qquad (1)$$

i cili simbolikisht shënohet me $\{a_n\}_{n\in N}$ ose $(a_n)_{n\in N}$.

Pra çdo pasqyrim nga bashkësia e *numrave natyrorë N* në bashkësinë e *numrave realë* $(a: N \to R)$ quhet *varg* në *R*.

Vargu në *R*, përcaktohet duke ditur *ligjin* e veprimit $a: n \to a(n)$.

Detyra 1. Të caktohet *anëtari i përgjithshëm* i vargjeve:

$a)$ $1,4,9,16,25,...$ $\qquad$ $b)$ $1,8,27,64,...$

$c)$ $\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},\frac{1}{3\cdot 4},...$ $\qquad$ $d)$ $1,\frac{2}{1\cdot 2},\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3},\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},...$

Zgjidhja.

$a)$ Vërejmë se secili anëtar paraqet katror të një numri natyror.

Prandaj anëtari i përgjithshëm është n^2.

$b)$ n^3; $\qquad$ $c)$ $\frac{1}{n(n+1)}$; $\qquad$ $d)$ $\frac{n}{n!}$.

Detyra 2. Të caktohet *anëtari i përgjithshëm* i vargut

$2,3,5,7,11,13,17,19,23,...$

Zgjidhja.

Vërejmë se në vargun e dhënë janë paraqitur 9 numrat e parë të thjeshtë.

Por, deri më tani nuk dihet ndonjë ligj sipas të cilit do ta caktonim termin e përgjithshëm të vargut të dhënë.

Detyra 3. Vargu numerik është dhënë me anëtarin e përgjithshëm:

$$a)\ a_n = \frac{n^2}{n^2+1}; \qquad b)\ a_n = \frac{n}{n+1}; \qquad c)\ a_n = \frac{(-1)^n n+1}{n^2+1};$$

$$d)\ a_n = \frac{1+(-1)^n}{2n}; \quad e)\ a_n = \frac{2^n-1}{n^2}; \qquad f)\ a_n = \sin\frac{n\pi}{2}.$$

Të paraqiten vargjet e dhëna në trajtën (1).

Zgjidhja.

a) Për $n=1,\ a_1 = \dfrac{1^2}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$

Për $n=2,\ a_2 = \dfrac{2^2}{2^2+1} = \dfrac{4}{5}$

Për $n=3,\ a_3 = \dfrac{3^2}{3^2+1} = \dfrac{9}{10}.$

Pra, kemi vargun: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{10}, \ldots, \dfrac{n^2}{n^2+1}, \ldots$

b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots$

c) Për $n=1,\ a_1 = \dfrac{(-1)^1\cdot 1+1}{1^2+1} = 0$

Për $n=2,\ a_2 = \dfrac{(-1)^2\cdot 2+1}{2^2+1} = \dfrac{3}{5}$

Për $n=3,\ a_3 = \dfrac{(-1)^3\cdot 3+1}{3^2+1} = \dfrac{-2}{10} = -\dfrac{1}{5}$

Pra, $0, \dfrac{3}{5}, -\dfrac{1}{5}, \ldots, \dfrac{(-1)^n\cdot n+1}{n^2+1}, \ldots$

d) $0, \dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1+(-1)^n}{2n}, \ldots$

e) $1, \dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{9}, \ldots, \dfrac{2^n-1}{n^2}, \ldots$

f) $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots, \sin\dfrac{n\pi}{2}, \ldots$

Detyra 4. Është dhënë vargu (a_n) me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \dfrac{n^2(n-1)}{3}$.

Të caktohen pesë anëtarët e parë të vargut të dhënë.

Të caktohen a_{99}, a_{n-2}, a_{n+1}.

Zgjidhja.

Për $n=1,\ a_1 = \dfrac{1^2 \cdot (1-1)}{3} = 0$

Për $n=2,\ a_2 = \dfrac{2^2 \cdot (2-1)}{3} = \dfrac{4}{3}$

Për $n=3,\ a_3 = \dfrac{3^2 \cdot (3-1)}{3} = 6$

Për $n=4,\ a_4 = \dfrac{4^2 \cdot (4-1)}{3} = 16$

Për $n=5,\ a_5 = \dfrac{5^2 \cdot (5-1)}{3} = \dfrac{100}{3}$.

$$a_{99} = \frac{99^2 \cdot (99-1)}{3} = \frac{99 \cdot 99 \cdot 98}{3} = 33 \cdot 99 \cdot 98 = 320166$$

$$a_{n-2} = \frac{(n-2)^2 \cdot (n-2-1)}{3} = \frac{(n-2)^2 \cdot (n-3)}{3}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+1-1)}{3} = \frac{n(n-2)^2}{3}.$$

Detyra 5. Është dhënë vargu (a_n) me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$. Të caktohen pesë anëtarët e parë të vargut (b_n) nëse $b_n = \dfrac{a_n + 1}{a_{n+1}}$.

Zgjidhja.

Për të caktuar pesë anëtarët e parë të vargut (b_n) së pari caktojmë gjashtë anëtarët e parë të vargut (a_n).

Kemi:

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = -\frac{1}{8}, a_4 = \frac{1}{16}, a_5 = -\frac{1}{32}, a_6 = \frac{1}{64}.$$

Atëherë

$$b_1 = \frac{a_1+1}{a_{n+1}} = \frac{a_1+1}{a_2} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

$$b_2 = -10, b_3 = 14, b_4 = -34, b_5 = 62.$$

Detyra 6. Vargu (a_n) është dhënë me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 2.$ Të shkruhen pesë anëtarët e parë të vargut.

Zgjidhja.

Meqë $a_n = 2,$ për çdo $n \in N$ atëherë $a_1 = 2, a_2 = 2, ..., a_5 = 2.$

Madje $a_{71} = 2, a_{n-2} = 2.$

Pra, të gjithë anëtarët e vargut janë 2.

Vargu i tillë quhet *varg konstant*.

Detyra 7. Të caktohen 5 anëtarët e parë të vargut të dhënë me formulën rekurente:

$a)$ $a_1 = 3;\ a_{n+1} = (a_1)^{-n} + 2a_n;$ $\qquad b)$ $a_1 = -3;\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+1}{a_n-3}.$

Zgjidhja.

$a)$

$$a_2 = (a_1)^{-1} + 2\cdot a_1 = 3^{-1} + 2\cdot 3 = \frac{1}{3} + 6 = \frac{19}{3}$$

$$a_3 = (a_1)^{-2} + 2\cdot a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot\frac{19}{3} = \frac{1+6\cdot 19}{9} = \frac{115}{9}$$

$$a_4 = (a_1)^{-3} + 2\cdot a_3 = \frac{1}{27} + \frac{2\cdot 115}{9} = \frac{1+6\cdot 115}{27} = \frac{691}{27}$$

$$a_5 = (a_1)^{-4} + 2\cdot a_4 = \frac{1}{81} + \frac{2\cdot 691}{27} = \frac{1+6\cdot 691}{81} = \frac{4147}{81}$$

$b)$

$$a_1 = -3, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = -\frac{1}{7}, a_5 = -\frac{3}{11}.$$

Detyra 8. Vargu (a_n) është dhënë si vijon

$$a_1 = 2, a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot a_k.$$

Të vërtetohet se $a_n = n(n+1).$

Zgjidhja.

Vërtetimin do ta kryejmë me *induksion matematik*.

$$a_2 = a_{1+1} = \frac{1+2}{1} \cdot a_1 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Po ashtu $a_2 = 2 \cdot (2+1) = 6.$

Supozojmë se pohimi është i saktë për $n = k.$

Pra se vlen $a_k = k(k+1).$

Tregojmë saktësinë e pohimit për $n = k+1.$

Pra, tregojmë se $a_{k+1} = (k+1)(k+2).$ Vërtetë

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k} \cdot a_k = \frac{k+2}{k} k(k+1) = (k+1)(k+2).$$

Detyra 9. Vargu (a_n) është i dhënë si vijon:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = (n-1) \cdot (a_{n-1} + a_{n+2}), \ n \geq 3.$$

Të caktohet anëtari i përgjithshëm i vargut.

Zgjidhja.

Për $n = 3$ merret $a_3 = (3-1) \cdot (a_1 + a_2) = 2 \cdot (1+2) = 6.$

Për $n = 4$ merret $a_4 = 3 \cdot (6+2) = 24.$

Për $n = 5$ merret $a_5 = 4 \cdot (24+6) = 120.$

Vërejmë se anëtarët e mësipërm mund të shprehen si vijon:

$$a_3 = 3!; a_4 = 4!, a_5 = 5!$$

Prej këtu merret ideja që të supozojmë se $a_n = n!.$ Këtë e vërtetojmë me anë të induksionit matematik.

Pohimi është i qartë për $k = 1, k = 2.$

Supozojmë se $a_{n-1} = (n-1)!, a_{n-2} = (n-2)!.$

Atëherë

$$\begin{aligned} a_n &= (n-1)((n-1)! + (n-2)!) \\ &= (n-1)((n-1)(n-2)! + (n-2)!) \\ &= (n-1)((n-2)!(n-1+1) \\ &= n(n-1)(n-2!) = n!. \end{aligned}$$

Detyra për ushtrime të pavarura.

1. Të caktohet anëtari i përgjithshëm i vargjeve:

a) $1,3,7,15,31,...$ *c*) $9,99,999,9999,...$

b) $0,3,8,15,24,...$ *d*) $1,-1,1,-1,...$

2. Të caktohet anëtari i përgjithshëm i vargjeve:

a) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},...$ *b*) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},...$

c) $100,97,93,88,82,...$ *d*) $2.1,3.2,5.3,8.5,...$

3. Të paraqiten nga pesë anëtarë të vargjeve të dhëna me anëtarin e përgjithshëm:

a) $a_n = 3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1};$ *b*) $a_n = \cos^n n\pi;$

c) $a_n = a+\frac{n+1}{n+1}\sin\frac{n\pi}{2};$ *d*) $a_n = \frac{\sin nx}{n};$

e) $a_n = \frac{n^3-1}{n^2-1};$ *f*) $a_n = \cos\frac{n!\pi}{2}+(-1)^n;$

g) $a_n = (-1)^{n+1}(2^n-1)$ *h*) $a_n = (-1)^{2n};$

i) $a_n = (-1)^{3n-1}.$

Cilat nga vargjet e dhëna janë vargje konstante?

4. Nëse $a_n = \frac{(n-1)^2}{n!-n^3}$ të caktohet a_4, a_5, a_6.

5. Nëse $a_n = \frac{(n-1)^n}{n!}$ të caktohet $a_{n-2}, a_{n+2}, a_n^2, a_{n!}$.

6. Vargu (a_n) është dhënë me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$.

a) Të caktohen pesë anëtarët e vargut (b_n) të dhënë me

$$b_n = (a_n)^2 - a_{n-1}$$

b) Të caktohen pesë anëtarët e vargut (c_n) të dhënë me

$c_n = b_{n-1}\cdot a_n + a_{n+1}^2\cdot b_n^2$, ku (b_n) është vargu i përkufizuar në rastin *a*).

7. Të caktohen pesë anëtarët e vargut të dhënë me formulat rekurente:

a) $a_1 = 3;\ a_n = a_{n-1}^2 + (n-1)(a_{n-1}+1)^2$

b) $a_1 = (-2)^n;\ a_2 = n^2;\ a_n = (a_{n-1}+a_{n-2})^2 + \frac{1}{2}$

c) $a_0 = \frac{1}{2};\ a_1 = \frac{2}{3};\ a_n = \left(\frac{a_{n-1}}{2} - 1\right)^{2n-1} + \frac{a_{n-2}}{3}.$

8. Është dhënë vargu (a_n) me anëtarin e përgjithshëm $a_n = \sqrt{n^3+1}.$ Prej të cilit anëtar, anëtarët e vargut do të jenë më të mëdhenj se 100?

9. Të vërtetohet se vargu (a_n) me anëtarin e përgjithshëm $a_n = 2^{n-1}+1$ plotëson relacionin $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, për çdo $n \geq 2.$

10. Të caktohet anëtari i përgjithshëm i vargut (a_n) nëse $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1},\ \ a_0 = 2, a_1 = 3.$

2. Vargjet monotone

Vargu (a_n) është:

a) *monoton rritës* nëse $\forall n \in N,\ \ a_n < a_{n+1}.$

b) *monoton zvogëlues* nëse $\forall n \in N,\ a_n > a_{n+1}.$

c) *monoton jo zvogëlues* nëse $\forall n \in N,\ \ a_n \leq a_{n+1}.$

d) *monoton jo rritës* nëse $\forall n \in N,\ \ a_n \geq a_{n+1}.$

Vargu që *plotëson* njërin nga kushtet *a*) – *d*) quhet *varg monoton*.

Detyra 10. Të tregohet se vargu (a_n) i dhënë me (termin) anëtarin e përgjithshëm $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in N$ është *monoton rritës*.

Zgjidhja.

Duhet të tregojmë se $\forall n \in N, a_n < a_{n+1}.$

Nga $a_n < a_{n+1}$ rrjedh se

$$a_n - a_{n+1} < 0 \tag{1}$$

ose

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \text{ (nëse } a_{n+1} > 0\text{)} \tag{2}$$

Pra, mjafton që të tregojmë se vlen njëri nga relacionet (1) ose (2).

Le të tregojmë p.sh. se vlen (1).

$$a_n = \frac{n}{n+1},\ a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}.$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

Pra, vargu (a_n) është *monoton rritës*.

Shënim. Provoni të tregoni se vargu është *monoton rritës* duke vërtetuar relacionin (2).

Detyra 11. Tregoni se vargu $a_n = \frac{10^n}{n!}, n > 9$ është *monoton zvogëlues.*

Zgjidhja.

Duhet të tregojmë se për çdo $n > 9$, $a_n > a_{n+1}$.

Nga $a_n > a_{n+1}$ rrjedh se:

$$a_n - a_{n+1} > 0 \tag{1}$$

ose

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \text{ (nëse } a_{n+1} > 0\text{)} \tag{2}$$

Le të tregojmë se vlen (2)

$$a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{10^n \cdot 10}{(n+1)n!}.$$

Atëherë

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{10^n}{n!}}{\frac{10^n \cdot 10}{(n+1)n!}} = \frac{n+1}{10} > 1, \text{ për } n > 9.$$

Pra, vargu është *monoton zvogëlues*.

Shënim. Tregoni se vargu është *monoton zvogëlues*, duke treguar se vlen (1).

Detyra 12. Të vërtetohet se vargu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in N$ është *monoton rritës.*

Zgjidhja.

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n+1)^n}{n^n}}=\frac{n^n(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n(n+1)^{n+1}}=\frac{n^{n+1}(n+2)^{n+1}}{((n+1)^2)^{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Zbatojmë mosbarazinë e Bernulit:

$$(\forall n\in N),\ \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}>1-\frac{n+1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Prandaj, $(\forall n\in N),\ \frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=1.$

D.m.th. $a_{n+1}>a_n$ përkatësisht $a_n<a_{n+1}$. Pra, vargu është *monoton rritës,*

Detyra 13. Të vërtetohet se nëse vargu $\left(\frac{a_n}{b_n}\right), (b_n>0)$ është *monoton zvogëlues* atëherë edhe vargu me termin e përgjithshëm

$$x_n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}$$

është *monoton zvogëlues.*

Zgjidhja.

Le të jetë $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ varg *monoton zvogëlues.* Atëherë

$$\frac{a_1}{b_1}>\frac{a_2}{b_2}>...>\frac{a_n}{b_n}>\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Pra, $\forall i\in\{1,2,...,n\}$ vlen:

$$\frac{a_i}{b_i} > \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \text{ ose meqë } (b_n > 0)$$

$$a_i \cdot b_{n+1} > a_{n+1} \cdot b_i .$$

Pra,

$$a_1 b_{n+1} > a_{n+1} b_1$$

$$a_2 b_{n+1} > a_{n+1} b_2$$

$$.....$$

$$a_n b_{n+1} > a_{n+1} b_n$$

Pasi të mblidhen anë për anë mosbarazitë e mësipërme merret:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n) b_{n+1} > (b_1 + b_2 + ... + b_n) a_{n+1}$$

prandaj,

$$a_{n+1}(b_1 + b_2 + ... + b_n) - (a_1 + a_2 + ... + a_n) b_{n+1} < 0.$$

Shqyrtojmë ndryshimin:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}}{b_1 + b_2 + ... + b_n + b_{n+1}} - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$$

$$= \frac{(a_1 + ... + a_n)(b_1 + ... + b_n) + a_{n+1}(b_1 + ... + b_n) - (a_1 + ... + a_n)(b_1 + ... + b_n) - b_{n+1}(a_1 + ... + a_n)}{(b_1 + ... + b_n + b_{n+1})(b_1 + ... + b_n)}$$

$$= \frac{a_{n+1}(b_1 + b_2 + ... + b_n) - (a_1 + a_2 + ... + a_n) b_{n+1}}{(b_1 + b_2 + ... + b_n + b_{n+1})(b_1 + b_2 + ... + b_n)} < 0 .$$

Pra, $x_{n+1} - x_n < 0$ prej nga $x_n > x_{n+1}$.

Pra vargu x_n është varg *monoton zvogëlues*.

Detyra 14. Të vërtetohet se vargu $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n}$ *nuk është monoton*.

Zgjidhja.

Le të jetë *n* numër çift, pra $n = 2k,\ k \in N$.

Atëherë

$$x_n = x_{2k} = \frac{1}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k}.$$

$$x_{n+1} = x_{2k+1} + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+1}$$

Prandaj

$$x_{n+1} - x_n = x_{2k+1} - x_{2k} = \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}$$

$$= \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k} - \frac{2}{2k+1} = \frac{2k-2k-2}{2k(2k+2)} - \frac{2}{2k+1} = -\frac{1}{k(2k+2)} - \frac{2}{2k+1} < 0$$

Pra $x_n > x_{n+1}$.

Le të jetë n numër tek, pra $n = 2k-1,\ k \in N$.

Atëherë

$$x_n = x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1+1} + \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k-1}.$$

$$x_{n+1} = x_{2k-1+1} = x_{2k} = \frac{1}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k}.$$

Prandaj,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k-1} > 0.$$

Pra $x_n < x_{n+1}$.

D.m.th. për $n = 2k,\ x_n > x_{n+1}$, për $n = 2k-1,\ x_n < x_{n+1}$.

Përfundojmë se vargu i dhënë *nuk është monoton*.

Detyra për ushtrime të pavarura

11. Të tregohet se vargu $a_n = \frac{1}{2n}, n \in N$ është monoton zvogëlues.

Të shqyrtohet *monotonia* e vargjeve:

12. $a_n = \frac{n-1}{n+1}$. **13.** $a_n = \frac{n^2}{n+1}$. **14.** $a_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}$.

15. $a_n = 1 + \frac{1}{3^n}$. **16.** $a_n = \frac{n^3}{n^2+5}$.

17. Provoni nëse vargjet:

a) $a_n = \frac{3^n+1}{3^n}$;

b) $$a_n = (-1)^n\left(\frac{1}{n}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{n}{n+1}\cos(n-1)\pi\right)$$

janë monotono zvogëluese.

18. Të tregohet se vargjet:

a) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n}$; *b*) $a_n = \ln\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)$

janë monoton rritëse.

19. Të tregohet se vargu $a_n = \dfrac{5^n}{n!}, n \geq 5, n \in N$ është monotono zvogëlues.

20. Të shqyrtohet monotonia e vargjeve

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; *b*) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$.

21. Të tregohet se nëse vargu $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, $b_n > 0$ është monoton rritës, atëherë edhe vargu $x_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$ është monoton rritës.

22. Tregoni se vargu $a_n = \log n$, është varg monoton rritës.

3. Kufizueshmëria e vargjeve

a) Vargu (a_n) është i *kufizuar* nga *sipër* nëse ekziston numri real M i tillë që $a_n \leq M$, $\forall n \in N$.

b) Vargu (a_n) është i *kufizuar* nga *poshtë* nëse ekziston numri real m i tillë që $m \leq a_n$, $\forall n \in N$.

c) Vargu (a_n) është i *kufizuar* nëse është i *kufizuar* nga *poshtë* dhe nga *sipër*. Pra, vargu është i kufizuar, nëse ekziston numri real pozitiv K i tillë që $|a_n| \leq K$, $\forall n \in N$.

Detyra 15. Të tregohet se vargu $a_n = \dfrac{n+3}{n+1}$ është i *kufizuar*.

Zgjidhja.

Për të treguar se vargu (a_n) është i kufizuar duhet të tregojmë se $|a_n| \leq K$, ku K është numër real.

Kemi:

$$|a_n| = \left|\frac{n+3}{n+1}\right| = \left|\frac{n+1+2}{n+1}\right| = \left|1+\frac{2}{n+1}\right| \le 1+\left|\frac{2}{n+1}\right| = 1+\frac{2}{n+1} \le 1+1 = 2,$$

sepse $\frac{2}{n+1} \le 1$. Pra, meqë $|a_n| \le 2$ përfundojmë se vargu është i kufizuar.

Detyra 16. Të shqyrtohet *kufizueshmëria* e vargut $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n}$.

Zgjidhja.

Meqë

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n - 1}{n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n} + \left(-\frac{1}{n}\right)\right| \le \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| + \left|\frac{(-1)}{n}\right|$$

$$= \frac{|(-1)^n|}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \le 2,$$

përfundojmë se vargu është i kufizuar.

Detyra 17. Të tregohet se vargu $a_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\log n}$, $n = 2, 3, \ldots$ është i *kufizuar*.

Zgjidhja.

Meqë

$$|a_n| = \left|\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\log n}\right| = \frac{\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|}{\log n} \le \frac{1}{\log n} \le \frac{1}{\log 2} < 4$$

përfundojmë se vargu është i kufizuar.

Shënim. Gjatë zgjidhjes së detyrës zbatuam këto rezultate:

1) $\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right| \le 1.$

2) $a_n = \log n$ është monoton rritës (shih detyrën 22) prandaj

$$\log 2 \le \log n,\ n = 2, 3, \ldots, \Rightarrow \frac{1}{\log n} \le \frac{1}{\log 2}.$$

3) $\log 2 \approx 0.3 > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{\log 2} < 4.$

Detyra 18. Të tregohet se vargu $a_n = \frac{[nx]}{n}$, $x \in R$ është i *kufizuar*.

Zgjidhja.

Shënimi $[x]$ - paraqet funksionin "*pjesa e plotë* e $x-$ it", që është funksion prej bashkësisë së numrave realë në bashkësinë e numrave të plotë dhe paraqet vlerën më të vogël të plotë të numrit x që nuk e kalon x – in.

Pra

$$[\ ]: R \to N;$$

$$[x] = k \Leftrightarrow k \le x < k+1,\ k \in Z.$$

Kështu p.sh. $[2.3] = 2; [3] = 3;\ [-4] = -4; [-3.7] = -4$

Le t'i kthehemi zgjidhjes së detyrës.

Sipas përkufizimit kemi:

$$[nx] = k \Leftrightarrow k \le nx < k+1,\ \ k \in Z$$

Është e qartë se:

$$nx - 1 \le [nx] \le nx$$

$$\frac{nx-1}{n} \le \frac{[nx]}{n} \le x$$

$$x - \frac{1}{n} \le \frac{[nx]}{n} \le x.$$

Meqë

$$\frac{1}{n} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} > -1 \Rightarrow x - \frac{1}{n} > x - 1 \text{ gjegjësisht}$$

$$x - 1 < x - \frac{1}{n}.$$

Pra kemi:

$$x - 1 < \frac{[nx]}{n} \le x$$

$$x - 1 < a_n \le x.$$

D.m.th. termat e vargut $a_n = \frac{[nx]}{n}$ ndodhen në intervalin $(x-1, x]$. Pra vargu i dhënë është i kufizuar.

Detyra 19. Të tregohet se vargu (a_n) i dhënë në anëtarin e përgjithshëm $a_n = n^2$ *nuk është i kufizuar*.

Zgjidhja.

Për dallim nga detyrat paraprake, tani duhet të tregojmë se vargu nuk është i kufizuar.

Pra, duhet të tregojmë se për çfarëdo numri M sado të madh që të zgjedhim, ekziston $n \in N$ ashtu që $a_n > M$.

Pra, që duke filluar prej një vlere të n – it, termat e vargut janë më të mëdhenjë se M.

Le të jetë M një numër sado i madh.

Nga jobarazimi $n^2 > M$ merret $n > \sqrt{M}$.

Shënojmë $N = [\sqrt{M}]$. Atëherë për çdo $n > N$, $a_n > M$. Pra vargu është i pakufizuar.

Le të sqarojmë këtë më tepër.

P.sh. le të jetë $M = 10^{100}$ (një numër sado i madh).

Nga jobarazimi $n^2 > 10^{100}$ merret $n > \sqrt{10^{100}} = 10^{50}$.

Shënojmë me $M = [10^{50}] = 10^{50}$.

Atëherë për $n > 10^{50}$; $a_n = n^2 > M$.

P.sh. $n = 10^{50} + 1$; $a_n = (10^{50} + 1)^2 = 10^{100} + 2 \cdot 10^{50} + 1 > 10^{100} = M$.

Pra, për të gjithë numrat $n > M$, $a_n > M$.

Detyra 20. Të tregohet se vargu $a_n = 3^{\sqrt{n}}$ *nuk është i kufizuar*.

Zgjidhja.

Le të jetë M një numër sado i madh. Nga jobarazimi $3^{\sqrt{n}} > M$ merret $\sqrt{n} > \log_3 M$ prej nga $n > (\log_3 M)^2$.

Shënojmë $N = [(\log_3 M)^2]$.

Atëherë për çdo $n > N$ vlen $a_n > M$ që d.m.th. se vargu a_n është i pakufizuar.

Detyra për ushtrime të pavarura

23. A janë të kufizuara vargjet:

a) $a_n = n \cdot \sin \dfrac{n\pi}{2}$; b) $a_n = \dfrac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\log n}$, $(n = 2, 3, \ldots)$.

24. Të vërtetohet se vargu $a_n = 2^{\sqrt[3]{n}}$ është i pakufizuar.

25. Të shqyrtohet kufizueshmëria e vargut $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

26. Të tregohet se vargu $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n + 10}{\sqrt{n^2+1}}$ është i kufizuar.

4. Limiti i vargut

Shembulli 1. Le të jetë dhënë vargu $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Pra, kemi vargun

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$$

Fig.

Nga figura vërejmë se sa më i madh të jetë indeksi n i kufizës a_n të vargu $\{a_n\}$, pika përkatëse është aq më afër 0.

Me fjalë të tjera, le të jetë ε çfarëdo numri pozitiv, sado i vogël qoftë. Në intervalin $(-\varepsilon, \varepsilon)$ gjenden të gjitha kufizat e vargut me indeks mjaftë të madh, më të madh se ndonjë numër natyror n_0.

Është e qartë se numri n_0 është më i madh nëse numri ε është më i vogël, pra n_0 varet prej numrit ε, çka do të shënojmë me $n_0(\varepsilon)$.

P.sh. për $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, $n_0 = 10$, sepse në vargun e dhënë të gjitha kufizat me indeks më të madh se n_0 d.m.th. $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$ gjenden brenda intervalit $\left(-\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}\right)$.

P.sh. për $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ të gjitha kufizat $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ me indeks $n > 100$ gjenden në intervalin $\left(-\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}\right)$ që d.m.th. $n_0 = 100$.

D.m.th. nëse $n > 100$ atëherë distanca e pikave a_n nga pika 0 do të jetë më e vogël se $\frac{1}{100}$ (sepse ato pika gjenden brenda intervalit $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ e kjo d.m.th. se $|a_n| < \frac{1}{100}$.

Pra, në shembullin tonë, çdoherë për ε të dhënë, sado i vogël qoftë ai, ekziston numër natyrorë $n_0(\varepsilon)$ i tillë që të gjitha kufizat a_n të vargut plotësojnë mosbarazinë: $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$ për $n > n_0(\varepsilon)$.

Shënim. Numri natyror $n_0(\varepsilon)$ shpesh do ta shënojmë edhe me $N(\varepsilon)$.

Shembulli 2. Le të jetë dhënë vargu $a_n = \frac{3n-1}{2n}$.

Pra, kemi vargun: $1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{11}{8}, \ldots$

Të njehsojmë: $a_{50}, a_{100}, a_{200}, a_{500}, a_{2500}$.

$$a_{50} = \frac{3 \cdot 50 - 1}{2 \cdot 50} = \frac{149}{100} = 1.49;$$

$$a_{100} = \frac{3 \cdot 100 - 1}{2 \cdot 100} = \frac{299}{200} = 1.495;$$

$$a_{200} = \frac{3 \cdot 200 - 1}{2 \cdot 200} = \frac{599}{400} = 1.4975;$$

$$a_{500} = \frac{3 \cdot 500 - 1}{2 \cdot 500} = \frac{1499}{1000} = 1.499;$$

$$a_{2500} = \frac{7499}{5000} = 1.4998.$$

Siç vërehet, këto vlera janë shumë afër numrit 1.5, d.m.th. numrit $\frac{3}{2}$.

Në këtë mënyrë kemi:

$$\left|a_{50} - \frac{3}{2}\right| = |a_{50} - 1.5| = |1.49 - 1.5| = |-0.01| = 0.01;$$

$$\left|a_{100} - \frac{3}{2}\right| = |-0.005| = 0.005;$$

$$\left|a_{200} - \frac{3}{2}\right| = 0.0025;$$

$$\left|a_{500}-\frac{3}{2}\right|=0.001;$$

$$\left|a_{2500}-\frac{3}{2}\right|=0.0002.$$

Shtrohet pyetja: A do të jenë vlerat e kufizave të këtij vargu afër numrit $\frac{3}{2}$ (d.m.th. a do të jetë vlera absolute $\left|a_n-\frac{3}{2}\right|$ e vogël) çdoherë kur indeksat e tyre të jenë mjaftë të mëdha?

Të gjejmë p.sh. për cilat vlera të indeksit n do të jetë $\left|a_n-\frac{3}{2}\right|\le 0.01.$

Meqë

$$\left|a_n-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{3n-1}{2n}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{3n-1-3n}{2n}\right|=\frac{1}{2n},$$

atëherë duke zgjidhur mosbarazin $\frac{1}{2n}\le 0.01$ kemi $n\ge 50.$

Pra, për $n\ge 50,$ $\left|a_n-\frac{3}{2}\right|\le 0.01,$ d.m.th. $n_0(\varepsilon)=50.$

Në mënyrë analoge tregohet se për $n\ge 500,$ $\left|a_n-\frac{3}{2}\right|\le 0.001.$

Në përgjithësi, $\forall\varepsilon>0,$ sado të vogël, do të jetë $\left|a_n-\frac{3}{2}\right|\le\varepsilon$ për $\frac{1}{2n}\le\varepsilon,$ përkatësisht për $n\ge\frac{1}{2\varepsilon}.$

Shembulli 3. Shqyrtojmë vargun, $a_n=n^2,$ pra $1,4,9,16,25,36,\ldots$

Është e qartë se për çfarëdo $\varepsilon>0$ sado i vogël qoftë ai, nuk mund të gjejmë asnjë interval me gjatësi 2ε në të cilin do të gjendeshin të gjithë termat e vargut me indeks n, më të madh se ndonjë numër natyror n_0 sado i madh të jetë ai.

Përkundrazi, le të jetë M sado i madh. Gjithmonë ekziston një bashkësi e pafundme kufizash të këtij vargu më të mëdha se M, d.m.th. varësisht nga M ekziston numri natyrorë $n_0(M)$ i tillë që për çdo $n>n_0(M)$ çdo kufizë e vargut a_n plotëson mosbarazimin $a_n>M$.

Nga tre shembujt e mësipërm, japim këtë:

Përkufizim. Numri *a* quhet *limiti i vargut* (a_n), nëse $\forall\varepsilon > 0$ (sado i vogël qoftë ai), ekziston numri natyrorë korrespondues $n_0(\varepsilon)$, i tillë që për të gjitha kufizat a_n të vargut (a_0) me indeksin $n > n_0(\varepsilon)$ të plotësohet mosbarazimi: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Simbolikisht shënojmë $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, ose $a_n \to a$, kur $n \to \infty$

Në këtë rast vargu (a_n) quhet *konvergjent*, ndërsa në të kundërtën, kur numri *a* nuk ekziston, vargu quhet *divergjent*.

Duke paraqitur kufizat a_n me anë të pikave në boshtin numerik, fitojmë kuptimin gjeometrik të limitit.

Fig.

Detyra 21. Të vërtetohet në bazë të përkufizimit se $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{2n+7} = \dfrac{3}{2}$.

Zgjidhja.

Duhet të tregojmë se $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))$ i tillë që për $n > N(\varepsilon)$ vlen $\left|\dfrac{3n+2}{2n+7} - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$.

Shqyrtojmë $\left|\dfrac{3n+2}{2n+7} - \dfrac{3}{2}\right| = \left|\dfrac{6n+4-6n-21}{2(2n+7)}\right| = \left|\dfrac{-17}{2(2n+7)}\right| < \dfrac{17}{2(2n+7)} < \varepsilon$

$$\frac{17}{2(2n+7)} < \varepsilon \Rightarrow 17 < 4n\varepsilon + 14\varepsilon \Rightarrow 4n\varepsilon > 17 - 14\varepsilon \Rightarrow n > \frac{17-14\varepsilon}{4\varepsilon}.$$

Për $N(\varepsilon)$ marrim pikërisht numrin $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{17-14\varepsilon}{4\varepsilon}\right]$.

Përfundojmë $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N\varepsilon) = \left[\dfrac{17-14\varepsilon}{4\varepsilon}\right])$ ashtu që $\forall n > N\varepsilon)$ vlen $\left|\dfrac{3n+2}{2n+7} - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$. D.m.th. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{2n+7} = \dfrac{3}{2}$.

Detyra 22. Të tregohet se $a^n \to 0, n \to \infty$, nëse $|a| < 1$. Çfarë mund të konkludojmë nëse $|a| > 1$?

Zgjidhja.

Sipas përkufizimit:

$(\forall\varepsilon > 0)$ duhet të gjendet $N(\varepsilon)$ i tillë që për çdo $n > N(\varepsilon)$ të jetë $|a^n - 0| = |a^n| = |a|^n < \varepsilon$. .

Në shprehjen $|a|^n < \varepsilon$ logaritmojmë me ç'rast merret $n\log|a| < \log\varepsilon$.

Meqë $|a|<1 \Rightarrow \log|a|<0$, dhe $\log\varepsilon<0 \Rightarrow n > \dfrac{\log\varepsilon}{\log|a|}$

Prandaj, numri i kërkuar është $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{\log\varepsilon}{\log|a|}\right]$.

Sikur $|a|>1$ atëherë

$$|a|^n = (1+h)^n > 1+nh,\ n \ge 2,\ h>0.$$

Meqë shprehja $1+nh$ rritet pambarimisht me n, atëherë e zgjedhim n të tillë që $1+nh > M$, për M sado të madh, atëherë

$$|a|^n > 1+nh > M \ \text{ ose } \ |a|^n > M \ \text{ për } \ n \ge \frac{M-1}{h}.$$

D.m.th. vargu $a_n = a^n$ për $|a|>1$ divergjon.

Detyra 22. Të njehsohen limitet e vargjeve vijuese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n-4}{(n+2)^2}$; *b*) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{4}n+\frac{5}{6}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n+7}{n^2+7n+2}$; *d*) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4}{n^4+1}$.

Zgjidhja.

Gjatë zgjidhjes do të zbatojmë rezultatin $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A}{n^k}=0$, për A – numër i fundëm real, $k \in N$.

a) Së pari zbërthejmë shprehjen $(n+2)^2$.

Merret $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n-4}{(n+2)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n-4}{n^2+2n+4}$.

Në numërues dhe në emërues fuqia më e madhe e n – it është 2 (n^2). Prandaj, numëruesin dhe emëruesin e pjesëtojmë me n^2. Merret

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2+3n-4}{n^2}}{\dfrac{n^2+2n+4}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}=\frac{1+0+0}{1+0+0}=1.$$

b) Meqë fuqia më e madhe e n – it është 3, numëruesin dhe emëruesin i pjesëtojmë me n^3. Merret:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{4}n+\frac{5}{6}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+6n^2+11n+6}{n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{4}n+\frac{5}{6}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}+\frac{6}{n^3}}{1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{4n^2}+\frac{5}{6n^3}}=1.$$

c) Meqë fuqia më e madhe e n – it është 3, numëruesin dhe emëruesin i pjesëtojmë me n^3. Merret:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n+7}{n^2+7n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}+\frac{2}{n^3}}=\frac{1+0+0}{0+0+0}=\frac{1}{0}=\infty.$$

d) Numëruesin dhe emëruesin i pjesëtojmë me n^4. Kemi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4}{n^4+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^4}}{1+\frac{1}{n^4}}=\frac{0+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0.$$

Detyra për ushtrime të pavarura

Të njehsohen limitet e vargjeve:

27. $\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{n+3}{2n+5}.$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-1}{(n-1)^3+1}.$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-13n+12}{2+4n-n^2}.$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n-7}{3n^2+2n+7}.$

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n+7}{2n^4-3n^2-9n}.$

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+n^5+n^6}{-n^7-n^6-n^5}.$

33. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^8+1}{n^2-1}.$

34. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+4)}.$

35. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+3}-\dfrac{n}{n+3}\right).$

Detyra 23. Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}.$

Zgjidhja.

Fuqia më e madhe e numrit *n* në numëruesin është $\dfrac{1}{2}$, sepse $\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}$, po ashtu $\sqrt{n+1}=(n+1)^{\frac{1}{2}}$.

Po ashtu edhe në emërues fuqia më e madhe e numrit *n* është $\dfrac{1}{2}$.

Prandaj, numëruesin dhe emëruesin i pjesëtojmë me $\sqrt{n}$. Merret:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}-1}{\sqrt{\dfrac{n+2}{n}}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}=\frac{1-1}{1+1}=0.$$

Detyra 24. Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt[3]{n^3-2n^2}}.$

Zgjidhja.

Meqë $n^2>3n,\ \forall n>3,$ atëherë fuqia më e madhe e numrit *n* në numërues është 1 sepse $\sqrt{n^2}=n.$

Po ashtu fuqia më e madhe e numrit *n* në emërues është 1 sepse $n^3>2n^2$, $\forall n>2,$ si dhe $\sqrt[3]{n^3}=n.$ Prandaj, numëruesin dhe emëruesin i pjesëtojmë me *n*. Kemi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{n}}{\dfrac{\sqrt[3]{n^3-2n^2}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2}}}{\dfrac{\sqrt[3]{n^3-2n^2}}{\sqrt[3]{n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{n^2+3n}{n^2}}}{\sqrt[3]{\dfrac{n^3-2n^2}{n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}}{\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n}}}=1.$$

Detyra 25. Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3-3n^2+7}+\sqrt[3]{n^4+3}}{\sqrt[4]{n^6+2n^5+1}-\sqrt[5]{n^7+2n^3+3}}.$

Zgjidhja.

Duke vepruar si në detyrat paraprake përfundojmë:

Në shprehjen $\sqrt{n^3-3n^2+7}$ fuqia më e madhe e n – it është $\frac{3}{2}$.

Në shprehjen $\sqrt[3]{n^4+3}$ fuqia më e madhe e n – it është $\frac{4}{3}$.

Në shprehjen $\sqrt[3]{n^6+2n^5+1}$ fuqia më e madhe e n – it është $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.

Në shprehjen $\sqrt[5]{n^7+12n^3+3}$ fuqia më e madhe e n – it është $\frac{7}{5}$.

Pasi të krahasojmë thyesat $\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{7}{5}$ përfundojmë se $\frac{3}{2}$ është thyesa më e madhe, prandaj numëruesin dhe emëruesin e thyesës i pjesëtojmë me $n^{\frac{3}{2}}=\sqrt{n^3}$.

Kemi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n^3-3n^2+7}}{\sqrt{n^3}}+\frac{\sqrt[3]{n^4+3}}{\sqrt{n^3}}}{\frac{\sqrt[4]{n^6+2n^5+1}}{\sqrt{n^3}}-\frac{\sqrt[5]{n^7+2n^3+3}}{\sqrt{n^3}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3-3n^2+7}{n^3}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+3}}{\sqrt{n^3}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^6+2n^5+1}}{\sqrt{n^3}}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^7+2n^3+3}}{\sqrt{n^3}}}=1,$$

sepse

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3-3n^2+7}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^3}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^6+2n^5+1}}{\sqrt{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^6+2n^5+1}}{\sqrt[4]{n^6}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^6}}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+3}}{\sqrt{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{(n^4+3)^2}}{\sqrt[6]{(n^3)^3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[6]{\frac{n^8+6n^4+9}{n^9}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[6]{\frac{1}{n}+\frac{6}{n^5}+\frac{9}{n^9}}=0.$$

Ngjashëm tregoni se $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^7+12n^3+3}}{\sqrt{n^3}}=0.$

Detyra për ushtrime të pavarura.

Të njehsohen limitet e vargjeve:

36. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}}.$ **37.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}.$

38. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+7n+3}}{\sqrt[3]{3n^3-3n^2+1}}.$ **39.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^3+1}+n}{\sqrt{7n^2+3}+3n+2}.$

40. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+5n+2}+\sqrt[3]{n^4+2n+2}}{n+\sqrt[3]{4n^4+1}}.$ **41.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^5+7}}{\sqrt{n^7}}.$

42. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{7n^7+2n^2+1}+n}{n-\sqrt[3]{n^4+1}}.$

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+\frac{1}{2}n+1}+\sqrt[3]{n^4+\frac{3}{2}n+1}}{\sqrt[4]{n^5+3n-6}+\sqrt[5]{n^6-2n+1}}.$

Detyra 26. Të njehsohet limiti $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$

Zgjidhja.

Nëse në limitin e dhënë zëvendësojmë drejtpërdrejtë me $n\to\infty$ merret forma e pacaktuar $(\infty-\infty)$.

Në raste të tilla e racionalizojmë shprehjen e dhënë, shprehja shumëzohet dhe pjesëtohet me $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

Detyra 27. Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}+n).$

Zgjidhja.

Së pari shprehjen e dhënë e paraqesim në trajtën

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}+n)=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}+\sqrt[3]{n^3}).$$

Përkujtojmë formulën $a^3+b^3=(a+b)(a^2-2ab+b^2).$

Nëse merren zëvendësimet $\sqrt[3]{1-n^3}=a;\ \sqrt[3]{n^3}=b.$

Prandaj, racionalizimin e shprehjes së dhënë e bëjmë duke shumëzuar dhe pjesëtuar me $\underbrace{(\sqrt[3]{(1-n^3)^2})^2}_{a^2}-\underbrace{\sqrt[3]{1-n^3}}_{a}\cdot\underbrace{\sqrt[3]{n^3}}_{b}+\underbrace{(\sqrt[3]{n^3})^2}_{b^2}$. Merret:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}+\sqrt[3]{n^3})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{1-n^3}+\sqrt[3]{n^3})((\sqrt[3]{(1-n^3)})^2-\sqrt[3]{1-n^3}\cdot\sqrt[3]{n^3}+(\sqrt[3]{n^3})^2}{(\sqrt[3]{1-n^3})^2-\sqrt[3]{1-n^3}\cdot\sqrt[3]{n^3}+(\sqrt[3]{n^3})^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{1-n^3})^3+(\sqrt[3]{n^3})^3}{(\sqrt[3]{1-n^3})^2-\sqrt[3]{1-n^3}\cdot\sqrt[3]{n^3}+(\sqrt[3]{n^3})^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[3]{1-n^3})^2-\sqrt[3]{1-n^3}\cdot\sqrt[3]{n^3}+(\sqrt[3]{n^3})^2}=0.$$

Arsyetoni.

Detyra 28. Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(n-\sqrt{n^2+1})$.

Zgjidhja.

Racionalizojmë shprehjen e dhënë:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n-\sqrt{n^2+1})(n+\sqrt{n^2+1})}{n+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n^2-(n^2+1))}{n+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+\sqrt{n^2+1}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n}{n^2}+\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}=-\infty.$$

Detyra për ushtrime të pavarura.

Të njehsohen limitet

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

45. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-4n+3})$. **46.** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-n^2}-n)$.

47. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$.

48. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{an+b}-\sqrt{an+c}), a>0$. **49.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

50. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\sin n!}{n^2+1}$. **51.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

52. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})$;

53. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{an+b}-\sqrt{an+c}),\ a>0,\ b,c$ numra real të fundmë;

54. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{n^2+9}-n)$; **55.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{n^3+6}-n\sqrt{n})$;

56. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+8}-n)$; **57.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(n-4)^2}-\sqrt[3]{(n+4)^2})$.

Detyra 29. Të njehsohet

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n},\ |a|<1,\ |b|<1.$$

Zgjidhja.

Anëtarët e shumës në numërues dhe në emërues paraqesin anëtar të *vargut gjeometrik.*

Le të njehsojmë shumën në numërues.

Le të shënojmë

$$S_n=1+a+a^2+...+a^{n-1}+a^n \tag{1}$$

Të dy anët e relacionit (1) i shumëzojmë me a.

Merret[1)]

$$a\cdot S_n=a+a^2+a^3+...+a^n+a^{n+1} \tag{2}$$

Duke zbritur nga (1) relacionin (2) merret:

$$S_n-aS_n=1-a^{n+1};$$

$$S_n(1-a)=1-a^{n+1};$$

$$S_n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Ngjashëm, nëse $T_n=1+b+b^2+...+b^n$ merret

---

[1]) Nëse do të kishim shumën $S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+...+a_1q^n$, atëherë duke vepruar ngjashëm do të merret $S_n=a_1\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, $q<1$.

$$T_n = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}.$$

Prandaj

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}$$

$$= \frac{1-b}{1-a}\cdot\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}a^{n+1}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}b^{n+1}} = \frac{1-b}{1-a}$$

sepse $\lim\limits_{n\to\infty}a^{n+1} = 0$ pasi $|a|<1,$ e po ashtu $\lim\limits_{n\to\infty}b^{n+1} = 0, |b|<1.$

Detyra 30. Të njehsohen limitet:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2+n+1};$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3+n^2+n+1};$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+...+n^3}{1-2n+3n^2+n^3-n^4}.$

Zgjidhja.

a) Në detyrën 1 tek induksioni matematik treguam se

$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prandaj kemi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+2n+2} = \frac{1}{2}.$$

b) ***Udhëzim.*** Zbatohet fakti që $1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, (shih detyrën 4 faqe 11). Rez. $\frac{1}{6}.$

c) ***Udhëzim.*** Zbatohet fakti që $1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, (shih detyrën 24 faqe 12). Rez. $-\frac{1}{4}.$

Detyra 31. Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}\cdot...\cdot\sqrt[2^n]{a}),$ a është numër i fundmë real.

Zgjidhja.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{a}=\lim_{x\to\infty}(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots\cdot a^{\frac{1}{2^n}})=\lim_{x\to\infty}a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to\infty}a^{1-\frac{1}{2^n}}=a.$$

Shënim: Gjatë zgjidhjes së detyrës zbatuam formulën për shumën e vargut gjeometrik.

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Detyra 32. Të njehsohet $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Zgjidhja.

Le të transformojmë anëtarin e përgjithshëm $\frac{1}{n(n+1)}$.

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1} \qquad (1)$$

Te anët e relacionit (1) i shumëzojmë me $n(n+1)$ merret:

$1=A(n+1)+Bn$ përkatësisht

$1=(A+B)n+A.$

Shprehjen e fundit mund ta shkruajmë në trajtën.

$$0\cdot n+1=(A+B)n+A. \qquad (2)$$

Relacioni (2) vlen nëse

$A+B=0$
$A=1.$

Prej nga merret $A=1,\ B=-1.$

Pra

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

D.m.th

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\\
\dfrac{1}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\\
\dfrac{1}{3\cdot 4}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\\
\quad\ldots\\
\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Duke mbledhur anë për anë relacionet në (3) merret:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1},$$

prandaj

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Detyra 33. Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

Zgjidhja.

Le të jetë $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2^n}$.

Atëherë

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\ldots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

Merret

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+\ldots+\left(\frac{2n-1}{n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\ldots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

$$S_n\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$ prej nga merret

$$S_n=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

Pra

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}\right)$$

$$=1+2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}=1+2=3.$$

Shënim. Provoni të tregoni se $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}=0$.

Detyra për ushtrime të pavarura.

Të njehsohen limitet e vargjeve:

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\ldots-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right).$

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right).$

62. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{27}{100}+\frac{27}{100^2}+\ldots+\frac{27}{100^n}\right).$

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right).$

64. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}}.$

65. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}$.

66. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$.

67. Vargu i numrave $a_0, a_1, \ldots$ merret sipas kësaj rregulle:

- a_0, a_1 janë numra të dhënë.
- secili anëtar tjetër është gjysma e shumës së dy anëtarëve paraprak.

a) Të shprehet a_n përmes a_0 dhe a_1.

b) Të njehsohet $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

68. Nëse $S_n = \dfrac{2^{n+2}-4}{2^n}$ të njehsohet a_n dhe $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Të njehsohen limitet:

69. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\left(x+\dfrac{a}{n}\right)^2+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)^2+\ldots+\left(x+\dfrac{(n-1)\cdot a}{n}\right)^2\right)$.

70. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}$.

71. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+4^3+7^3+\ldots+(3n-2)^3}{1+4+7+\ldots+(3n-2)}$.

72. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\cdot\ldots\cdot\sqrt{a}}}}$ (n – rrënjë).

73. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\cdot\ldots\cdot\sqrt{a\sqrt{b}}}}}}$ ($2n$ – rrënjë).

74. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

75. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)}{n^3}$.

76. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt{\left(1-\dfrac{a}{n}\right)\cdot\left(1-\dfrac{b}{n}\right)}\right)$.

77. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{8}+\ldots+\arctan\dfrac{1}{2n^2}\right)$.

78. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

79. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+...+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right).$

80. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+...+a_k}{b_0n^h+b_1n^{h-1}+...+b_h},(a_0,b_0\neq 0).$

81. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+...+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right).$

82. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-...+(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n}\right).$

83. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}\right).$

84. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)+...+(1+x^{2n}),|x|<1.$

85. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\cdot...\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}.$

Duke zbatuar relacionin

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad (1)$$

të njehsohen limitet vijuese:

Detyra 34. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Zgjidhja.

a) Shprehjen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$ e transformojmë në mënyrë që ta zbatojmë rezultatin (1). Merret:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-n)}\right)^{(-n)\cdot(-1)}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(-n)}\right)^{(-n)}\right)^{(-1)}=e^{-1}.$

Detyra 35. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2-4}\right)^{n^2+1}$.

Zgjidhja.

Që të mund të zbatojmë rezultatin (1) shprehjes $\frac{n^2+4}{n^2-1}$ i shtojmë dhe i zbresim numrin 1. Merret:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2-4}\right)^{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+4}{n^2-4}-1\right)^{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+4-n^2+4}{n^2-4}\right)^{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{n^2-4}\right)^{n^2+1}.$$

Le të krahasojmë limitet:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{n^2-4}\right)^{n^2+1} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Pra, që të kemi një "*ngjashmëri*" duhet që shprehjen $\frac{8}{n^2-4}$ ta shënojmë në trajtën $\frac{1}{\frac{n^2-4}{8}}$. Merret:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{n^2-4}\right)^{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-4}{8}}\right)^{\frac{n^2-4}{8}\cdot\frac{8}{n^2-4}\cdot(n^2+1)}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-4}{8}}\right)^{\frac{n^2-4}{8}\cdot}\right)^{\frac{8}{n^2-4}\cdot(n^2+1)}$$

$$=e^{\lim\frac{8(n^2+1)}{n^2-4}}=e^8.$$

Shënim. Zbatuam faktin që: $\lim\limits_{n\to\infty}K^{a_n}=K^{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$, K – konstante.

Detyra 36. $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot(\ln(n+1)-\ln n)$.

Zgjidhja.

Zbatojmë vetitë e logaritmeve: 1) $\ln a - \ln a = \ln\frac{a}{b}$; 2) $x \cdot \ln a = \ln a^{x}$. Merret:

$$\lim_{n\to\infty} n(\ln(n+1) - \ln n) = \lim_{n\to\infty} n\left(\ln\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right) = \ln e = 1.$$

Detyra për ushtrime të pavarura:

Të njehsohen limitet

86. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n}, \alpha \in R.$

87. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right)^{n}.$

88. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}.$

89. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+10}.$

90. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{n}.$

91. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}.$

92. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^{2}}\right)^{n}.$

93. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{n+3}\right)^{n+4}.$

94. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-5}\right)^{n}.$

95. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{n}}{2+\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{1+\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}}.$

96. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^{2}-3n+7}{n^{2}+4n-5}\right)^{n+2}.$