

## 4. Integrimi i funksioneve racionale

Të njehsohen integralet:

$$1. \int \frac{dx}{x^2 - a^2}. \quad 2. \int \frac{dx}{a^2 - x^2}.$$

**Zgjidhja.**

$$1. \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

$$1 = A(x+a) + B(x-a)$$

$$1 = (A+B)x + (A-B)a$$

Merret sistemi:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ (A-B)a=1 \end{cases}$$

Pas zgjidhjes merret  $A = \frac{1}{2a}$ ;  $B = -\frac{1}{2a}$ .

Prandaj,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

2. Ngjashëm, zgjidhet detyra 2. Rezultati është  $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$ .

**Detyra për ushtrime**

Të njehsohen integralet:

$$1. \int \frac{dx}{1-x^2}. \quad 2. \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - b^2}. \quad 3. \int \frac{dx}{9x^2 - 2}. \quad 4. \int \frac{dx}{5x^2 - 16}.$$

3. Të shqyrtohet dhe të njehsohet integrali:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad a \neq 0.$$

**Zgjidhja.**

Trinomi  $ax^2 + bx + c$  shndërrohet në formën kanonike

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k \right),$$

ku

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

Merret zëvendësimi  $x + \frac{b}{2a} = y$ ,  $dx = dy$ . Kemi:

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dy}{y^2 + k}.$$

Varësisht, nga vlera që merr  $k$  dallojmë rastet:

1)  $k = 0$ ;  $\left( \text{D.m.th. } \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \right)$ , atëherë

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{a} \int y^{-2} dy = -\frac{2}{2ax + b} + C$$

2)  $k > 0$ ;  $\left( \text{D.m.th. } \frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0 \right)$ , atëherë

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{dy}{y^2 + \sqrt{k^2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \arctan \frac{y}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C$$

3)  $k < 0$ ;  $\left( \text{D.m.th. } \frac{4ac - b^2}{4a^2} < 0 \right)$ , atëherë merret

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{dy}{y^2 - k} = \frac{1}{a} \int \frac{dy}{y^2 - \sqrt{k^2}} = \frac{1}{a} \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{y - \sqrt{k}}{y + \sqrt{k}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C.$$

Të njehsohen integralet:

$$4. \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18}.$$

$$5. \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4}.$$

$$7. \int \frac{dx}{x^2 + 4x}.$$

$$8. \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

$$9. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2}.$$

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} 4. \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18} &= \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 9} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 1 \cdot 18 - 36}} \arctan \frac{2 \cdot 1 \cdot x - 6}{\sqrt{4 \cdot 1 \cdot 18 - 36}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{36}} \arctan \frac{2x - 6}{6} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x - 3}{3} + C. \end{aligned}$$

**Shënim.** Integralin e dhënë në detyrën e fundit do të mund ta zgjidhim edhe me anë të metodës së zëvendësimit:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 3^2} &= \left| \begin{array}{l} x-3 = 3t \\ dx = 3dt \end{array} \right| = \int \frac{3dt}{9t^2 + 9} = \int \frac{3dt}{9(t^2 + 1)} = \frac{1}{3} \arctan t \\ &= \frac{1}{3} \arctan \frac{x-3}{3} + C. \end{aligned}$$

5. Në këtë rast:  $a = -1, b = -5, c = 6$ .

$$\text{Kemi } k = \frac{4ac - b^2}{4a^2} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 6 - 25}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Pra, kemi rastin e tretë:

Prandaj

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{\sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}} \ln \left| \frac{2 \cdot 1 \cdot x - 5 - \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1 \cdot x - 5 + \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}} \right| \\ &= \ln \left| \frac{2x - 6}{2x - 4} \right| = \ln \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| + C. \end{aligned}$$

**Shënim.** Detyrën mund ta zgjidhim edhe si vijon:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int \frac{(x-2) - (x-3)}{(x-2)(x-3)} dx \\
 &= \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} = \ln |x-3| - \ln |x-2| + C = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C.
 \end{aligned}$$

6. Lehtë vërejmë se  $k = 0$  :

D.m.th.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2} = -\frac{2}{2 \cdot 1 \cdot x + 4} + C = -\frac{1}{x+2} + C.$$

7. Kemi  $a = 1$ ,  $b = 4$ ,  $c = 0$ . Atëherë  $k = -4 < 0$ .

Prandaj

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x + 4 - 4}{2x + 4 + 4} \right| = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x+4} \right| + C.$$

$$\begin{aligned}
 8. \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt \end{array} \right| \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\frac{3}{4}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2} &= \int \frac{dx}{3\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{3} - \frac{1}{9}} \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} t \\ dx = \frac{\sqrt{5}}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \left( \int \frac{\frac{\sqrt{5}}{3} dt}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 (t^2 + 1)} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{3}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3x-1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3x-1}{\sqrt{5}} + C.$$

### ***Detyra për ushtrime***

Të shqyrtohet dhe të njehsohet integrali i formës:

5.  $\int \frac{dx}{x^2 + bx + c}.$

6.  $\int \frac{dx}{ax^2 + x + c}.$

Të njehsohen integrale:

7.  $\int \frac{dx}{x^2 - 4x - 4}.$

8.  $\int \frac{dx}{-x^2 + 5x + 1}.$

9.  $\int \frac{dx}{3x^2 + x - 4}.$

10.  $\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$

11.  $\int \frac{dx}{x^2 - x - 1}.$

12.  $\int \frac{dx}{3x^2 + x + 5}.$

Në rastin e përgjithshëm, integrali i funksioneve racionale shndërrohet në integrimin e thyesës së trajtës

$$\frac{p(x)}{q(x)} \tag{1}$$

ku  $\deg p(x) < \deg q(x)$ .

Nëse polinomi  $q(x)$  mund të shprehet si:

$$q(x) = (x - a)^m (x^2 + px + q)^n$$

ku  $a$  është rrënjë reale e  $m$  - fisht e polinomit, kurse  $\alpha \pm \beta i$  janë rrënjë të shumëfishta komplekse atëherë shprehja (1) paraqitet në trajtën:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x - a)^m} + \frac{B_1 + C_1 x}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{B_n + C_n x}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Të panjohurat  $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n$  caktohen me metodën e koeficienteve të pacaktuar.

Të njehsohen integralet:

10.  $\int \frac{x}{(x+2)(x-3)} dx.$

11.  $\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^2(x+2)} dx.$

12.  $\int \frac{2x^2}{x^4 - 1} dx.$

13.  $\int \frac{dx}{x^3 - 1}.$

**Zgjidhja.**10. Funkcionin  $\frac{x}{(x+2)(x-3)}$  e shënojmë në trajtën

$$\frac{x}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}. \quad (1)$$

Duke shumëzuar të dy anët e (1) me  $(x+2)(x-3)$  merret:

$$x = A(x-3) + B(x+2)$$

$$x = (A+B)x + (2B-3A).$$

Pra, merret sistemi:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2B-3A=0 \end{cases}$$

me zgjidhjen e të cilit kemi:  $A = \frac{2}{5}, B = \frac{3}{5}.$ 

Pra

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+2)(x-3)} dx &= \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x-3} = \frac{2}{5} \ln|x+2| + \frac{3}{5} \ln|x-3| \\ &= \frac{1}{5} \ln(x+2)^2 + \frac{1}{5} \ln|x-3|^3 = \frac{1}{5} \ln(x+2)^2 |x-3|^3 + C. \end{aligned}$$

11. Duke vepruar ngjashëm merret:

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$x^2 + 2 = A(x+1)(x+2) + B(x+2) + C(x+1)^2.$$

Pas transformimeve merret sistemi:

$$\begin{cases} A+C=1 \\ 3A+B+2C=0 \\ 2A+2B+C=2 \end{cases}$$

Me zgjidhjen e të cilit merret:  $A = -5, B = 3, C = 6.$

Pra,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^2(x+2)} dx &= -5 \int \frac{dx}{x+1} + 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2} + 6 \int \frac{dx}{x+2} \\ &= -5 \ln |x+1| - \frac{3}{x+1} + 6 \ln |x+2| \\ &= \ln(x+2)^6 - \ln |x+1|^5 - \frac{3}{x+1} \\ &= \ln \frac{(x+2)^6}{|x+1|^5} - \frac{3}{x+1} + C. \end{aligned}$$

$$12. \frac{2x^2}{x^4 - 1} = \frac{2x^2}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)}$$

Pra

$$\frac{2x^2}{(x-1)(x+1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Pas transformimeve merret sistemi:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 2 \\ A + B - C = 0 \\ A - B - D = 0 \end{cases}$$

Me zgjidhjen e të cilit kemi:  $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = 0, D = 1.$

Pra

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2}{x^4 - 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + \arctan x \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \arctan x + C. \end{aligned}$$

$$13. \frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Pas transformimeve merret sistemi:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases}$$

Me zgjidhjen e të cilit merret:  $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{2}{3}$ .

D.m.th.

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| + I_1$$

ku

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2+x+1} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2(x+2)}{x^2+x+1} dx \\ &= -\frac{1}{6} \int \frac{2x+1+3}{x^2+x+1} dx = -\frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= -\frac{1}{6} I_2 - \frac{1}{2} I_3. \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln(x^2+x+1).$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan \frac{\frac{x+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Pra

$$I_1 = -\frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

D.m.th.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3-1} &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{6} \ln(x-1)^2 - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

Të njehsohen integralet:

14.  $\int \frac{1}{x^4+1} dx.$

15.  $\int \frac{x^3+5x^2+3x+2}{x^3+5x} dx.$

16.  $\int \frac{3x^5+x^3-x}{x^3-x} dx.$

17.  $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-x+1} dx.$

18.  $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}.$

19.  $\int \frac{dx}{x^3-3x+2}.$

20.  $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1-x+x^2)}.$

**Zgjidhja.**

14. **Udhëzim.**

Shprehja e dhënë transformohet si vijon:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+1} &= \frac{1}{x^4+2x^2+1-2x^2} = \frac{1}{(x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2} = \frac{1}{(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)} \\ &= \frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}.\end{aligned}$$

D.m.th.

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

15. Së pari kryejmë pjesëtimin. Merret

$$\frac{x^3+5x^2+3x+2}{x^3+5x} = 1 + \frac{5x^2-2x+2}{x(x^2+5)}.$$

Duke vepruar si në detyrat paraprake merret:

$$\frac{5x^2 - 2x + 2}{x(x^2 + 5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 5}.$$

Pas transformimeve merret sistemi:

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ C = -2 \\ 5A = 2 \end{cases}$$

prej nga  $A = \frac{2}{5}, B = \frac{23}{5}, C = -2$ .

D.m.th.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 5x^2 + 3x + 2}{x^3 + 5x} dx &= \int \left( 1 + \frac{\frac{2}{5}}{x} + \frac{\frac{23}{5}x - 2}{x^2 + 5} \right) dx \\ &= x + \frac{2}{5} \ln |x| + \frac{23}{5} \int \frac{x}{x^2 + 5} dx - \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} \\ &= x + \frac{2}{5} \ln |x| + \frac{23}{10} \ln(x^2 + 5) - \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

16. Veprojmë ngjashëm si në detyrën paraprake:

$$\frac{3x^5 + x^3 - x}{x^3 - x} = 3x^2 + 4 + \frac{3x}{x^3 - x}$$

D.m.th.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^5 + x^3 - x}{x^3 - x} dx &= \int \left( 3x^2 + 4 + \frac{3x}{x(x-1)(x+1)} \right) dx \\ &= x^3 + 4x + 3 \int \frac{dx}{x^2 - 1} = x^3 + 4x + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$17. \int \frac{x+2}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \int \frac{x+2}{x^2(x-1) - (x-1)} dx = \int \frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)} dx.$$

Duke vepruar si në detyrat paraprake merret:

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Pas transformimeve merret sistemi:

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B - 2C = 0 \\ -A + B + 2C = 2 \end{cases},$$

me zgjidhjen e të cilit merret  $A = \frac{1}{4}, B = \frac{3}{2}, C = \frac{3}{4}$ .

Pra

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{4} \ln |x-1| - \frac{3}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{4} \ln |x+1| \\ &= \frac{1}{4} \ln |x-1| |x+1|^3 - \frac{3}{2(x-1)} + C. \end{aligned}$$

### 18. Meqë

$$\begin{aligned} x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 &= x^4(x-1) + x^2(x-1) + (x-1) \\ &= (x^4 + x^2 + 1)(x-1) = (x-1)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) \\ &= (x-1)((x^2 + 1) - x^2) = (x-1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

merret:

$$\frac{1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2 - x + 1} + \frac{Dx+E}{x^2 + x + 1}$$

Pas transformimeve merret sistemi:

$$\begin{cases} A + B + D = 0 \\ C - 2D + E = 0 \\ A + 2D - 2E = 0 \\ -B - D + 2E = 0 \\ A - C - E = 1 \end{cases}$$

me zgjidhjen e të cilit merret:  $A = -\frac{1}{3}$ ,  $B = 0$ ,  $C = -\frac{1}{2}$ ,  $D = -\frac{1}{3}$ ,  
 $E = -\frac{1}{6}$ .

Pra

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

19. Së pari faktorizojmë shprehjen  $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ .

D.m.th.

$$\frac{1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

Pas transformimeve merret sistemi:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B - 2C = 0 \\ 2A + 2B + C = 1 \end{cases}$$

me zgjidhjen e të cilit merret:  $A = -\frac{1}{5}$ ,  $B = \frac{3}{5}$ ,  $C = \frac{1}{5}$ .

D.m.th.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 - 3x + 2} &= -\frac{1}{5} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{5} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+2} \\ &= -\frac{1}{5} \ln |x-1| - \frac{3}{5} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{5} \ln |x+2| = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| - \frac{3}{5(x-1)} + C. \end{aligned}$$

**20. Udhëzim.**

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^3) &= (1+x)(1+x^2)(1+x)(1-x+x^2) \\ &= (1+x)^2(1+x^2)(1-x+x^2).\end{aligned}$$

D.m.th. kemi:

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1-x+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} + \frac{Ex+F}{1-x+x^2}.$$

**Detyra për ushtrime**

Të njehsohen integrale:

$$13. \int \frac{dx}{x^4 + 16}$$

$$14. \int \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{x^3 - x} dx.$$

$$15. \int \frac{2x^5 + x^3 - 2x}{x^3 + 2x} dx.$$

$$16. \int \frac{x^5 + 2}{x^4 + x} dx.$$

$$17. \int \frac{x-2}{x^3 + x^2 - 3x - 3} dx.$$

$$18. \int \frac{dx}{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}.$$

$$19. \int \frac{dx}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

$$20. \int \frac{dx}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x+x^2)}.$$

**Metoda e Ostrogradskit**

Le të jenë  $P(x)$  dhe  $Q(x)$  polinome me koeficient realë. Le të jetë shkalla e polinomit  $P(x)$  më e vogël se shkalla e polinomit  $Q(x)$ , pra thyesa  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  është e rregullt.

(1) Le të jetë

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x - a_r)^{\alpha_r} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}$$

ku  $a_i, p_i, q_j$  janë numra real të tillë që  $\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0$ , kurse  $\alpha_i$  dhe  $\beta_j$  janë numra natyror,  $i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s$ .

Le të jenë

$$Q_1(x) = (x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdot \dots \cdot (x - a_r)^{\alpha_r - 1} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1 - 1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s - 1}$$

$$Q_2(x) = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_r) \cdot (x^2 + p_1x + q_1) \cdot \dots \cdot (x^2 + p_sx + q_s).$$

Atëherë ekzistojnë polinomet  $P_1(x)$  dhe  $P_2(x)$  shkalla e të cilëve është më e vogël se shkalla e polinomit  $Q_1(x)$  dhe  $Q_2(x)$ , ku po e cekim që shkalla e polinomit  $Q_1(x)$  është  $n_1$  kurse shkalla e polinomit  $a_2(x)$  është  $n_2 (= r + 2s)$ , të tillë që

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx.$$

Koeficientët e polinomeve  $P_1(x)$  dhe  $Q_1(x)$  njehsohen me anë të metodës së koeficienteve të pacaktuar.

**Shënimi 1.** Polinomet  $Q_1(x)$  dhe  $Q_2(x)$  mund të caktohen në mënyrë të drejtpërdrejtë edhe pa e ditur zërthimin (1) e polinomit  $Q(x)$  në faktorë të pazbërthyesëm.

Polinomi  $Q_1(x)$  është pjesëtuesi më i madhë i përbashkët i polinomeve  $Q(x)$  dhe derivatit të tij  $Q'(x)$ , dhe mund të caktohet përmes algoritmit të Euklidit, gjerësa  $Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)}$ .

**Shënimi 2.** Kjo metodë së pari u publikuar nga M.V. Ostrogradski më 1845 dhe për hirë të tij mbanë këtë emër.

Duke zbatuar metodën e Ostrogradskit të njehsohen integralet:

$$25. \int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

$$26. \int \frac{dx}{(x^3+1)^2}.$$

**Zgjidhja.**

25. Në rastin tonë:

$$P(x) = x$$

$$Q(x) = (x-1)^2(x+1)^3.$$

Atëherë  $Q_1(x) = (x-1)^{2-1}(x+1)^{3-1} = (x-1)(x+1)^2$

$$\deg Q_1(x) = 3.$$

$$Q_2(x) = (x-1)(x+1) \deg Q_2(x) = 2.$$

D.m.th. polinomet  $P_1(x)$  dhe  $P_2(x)$  ashtu që  $\deg P_1(x) = 2$ ;  $\deg P_2(x) = 1$ .

$$\text{Pra } P_1(x) = Ax^2 + Bx + C; P_2(x) = D_1x + F_1.$$

Atëherë:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x+1)^2} + \int \frac{D_1x + F_1}{(x-1)(x+1)} dx$$

Nëse vepojmë si në rastet paraprake merret:

$$\int \frac{D_1x + E_1}{(x-1)(x+1)} dx = D \int \frac{dx}{x-1} + E \int \frac{dx}{x+1}$$

Pra, kemi:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x-1)(x+1)^2} + D \int \frac{dx}{(x-1)} + E \int \frac{dx}{x+1}.$$

Diferencojmë të dy anët e shprehjes së fundit, merret:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{(x^2-1)(2Ax+B) - (3x-1)(Ax^2+Bx+C)}{(x-1)^2(x+1)^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}.$$

Duke vepruar si në rastet e mësipërme merret sistemi i barazimeve:

$$\begin{cases} D + E = 0 \\ -A + 2D = 0 \\ A - 2B - 2E = 0 \\ -2A + B - 3C - 2D = 1 \\ C - B - D + E = 0 \end{cases}$$

Pas zgjidhjes së sistemit merret:  $A = B = -\frac{1}{8}$ ;  $C = -\frac{1}{4}$ ;  $D = -\frac{1}{16}$ ;

$$E = \frac{1}{6}.$$

D.m.th.

$$\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3} = \frac{x^2 + x + 2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C; \quad x \neq \pm 1.$$

26.  $P(x) = 1$

$$Q(x) = (x^3 + 1)^2 = [(x+1)(x^2 - x + 1)]^2 = (x+1)^2(x^2 - x + 1)^2.$$

Atëherë

$$Q_1(x) = (x+1)^{2-1}(x^2 - x + 1)^{2-1} = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

$$\deg Q_1(x) = 3.$$

$$Q_2(x) = (x+1)(x^2 - x + 1). \quad \deg Q_2(x) = 3.$$

Pra, ekzistojnë polinomet  $P_1(x)$  dhe  $P_2(x)$  ashtu që:

$$\deg P_1(x) = 2; \quad \deg P_2(x) = 2.$$

Pra  $P_1(x) = Ax^2 + Bx + C$ ;  $P_2(x) = D_1x^2 + E_1x + F_1$ .

Kemi:

$$\int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x+1)(x^2 - x + 1)} + \int \frac{d_1x^2 + E_1x + F_1}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

$$\int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 + 1} + D \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{Ex + F}{x^2 - x + 1} dx.$$

Diferencojmë të dy anët dhe zgjedhim sistemin:

Merret:

$$A = C = 0; \quad B = \frac{1}{3}; \quad D = \frac{2}{9}; \quad E = -\frac{2}{9}; \quad F = \frac{4}{9}.$$

D.m.th.

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9} \ln|x+1| - \frac{2}{9} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx$$

$$= \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9} \frac{\ln(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C, \quad (x \neq -1).$$

### *Detyra për ushtrime*

Duke zbatuar metodën e Ostrogradskit të njehsohen integrale:

21.  $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$

22.  $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}.$

23.  $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2}.$

24.  $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}.$

25.  $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}.$

26.  $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx.$

27.  $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2} dx.$

28.  $\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$