6. Integrimi i funksioneve iracionale

Të njehsohen integralet:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^3}}.$

2. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}dx.$

3. $\int \frac{2+\sqrt{x+2}}{x^2+4x+4-\sqrt{x+2}}dx.$

4. $\int \frac{x\cdot\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx,\quad x\neq -2.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^4(x-5)^2}}.$

6. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}.$

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx.$

8. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}.$

Zgjidhja.

1. Marrim zëvendësimin $x=t^{10};\ dx=10t^9dt.$

Pra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^3}}=\int \frac{10t^9dt}{t^5+t^6}=10\frac{t^9dt}{t^5(1+t)}=10\int \frac{t^4}{t+1}dt$$

$$=10\int\left(t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=10\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+\ln|t+1|\right)+C\ \text{ ku }\ t=\sqrt[10]{x}.$$

2. Zëvendësojmë $x+2=t^6,\ dx=6t^5dt.$ Merret:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}dx=\int \frac{(t^6-1)6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int \frac{(t^6-1)t^5}{t^2(t+1)}dt$$

$$=6\int \frac{(t^6-1)t^3}{t+1}dt=6\left(\frac{t^9}{9}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}\right)+C\ \text{ ku }\ t=\sqrt[6]{x+2}.$$

3. Integralin e dhënë e shënojmë në trajtën:

$$I=\int\frac{2+\sqrt{x+2}}{(x+2)^2-\sqrt{x+2}}dx=\left|\begin{array}{l}x+2=t^2\\ dx=2tdt\end{array}\right|=\int\frac{2+t}{t^4-t}2tdt=2\int\frac{2+t}{t(t^3-1)}tdt$$

$$=2\int\frac{2+t}{t^3-1}dt=2\int\left(\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1}\right)dt.$$

Pas transformimeve merret $A=1;\ B=-1;\ C=-1.$

Pra

$$I=2\int\frac{dt}{t-1}-2\int\frac{t+1}{t^2+t+1}dt$$

$$=2\ln|t-1|-\ln(t^2+t+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,\ \text{ku}\ t=\sqrt{x+2}.$$

4. Zëvendësojmë $x+2=t^3,\ dx=3t^2dt$

$$\int\frac{x^3\sqrt{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx=\int\frac{(t^3-2)t\cdot 3t^2}{(t^3-2)+t}dt=3\int\frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}dt$$

$$=3\int\left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)}\right)dt=\frac{3t^4}{4}-\frac{3t^2}{2}+3\int\frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)}dt$$

Shprehjen nën funksionin integral e transformojmë si vijon:

$$\frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t+2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+2}.$$

Pas zgjidhjes merret: $A=-\frac{1}{4};\ B=\frac{5}{4};\ C=-\frac{1}{2}.$

Pas zgjidhjes merret:

$$I=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)-\frac{27}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C,$$

ku $t=\sqrt[3]{x+2}.$

5. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^4(x-5)^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\frac{(x-5)^2}{(x-3)^4}(x-3)^6}}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-5}{x-3}\right)^2}\cdot(x-3)^2}.$

Zëvendësojmë: $\frac{x-5}{x-3}=t^3;\ \frac{dx}{(x-3)^2}=\frac{3}{2}t^2dt.$

Pra

$$I=\frac{3}{2}\int\frac{t^2dt}{t^2}=\frac{3}{2}t+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x-5}{x-3}}+C.$$

6. Zëvendësojmë: $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=u$

Atëherë

$$x+2\sqrt{x}\sqrt{x+1}+x+1=u^2$$

$$2x+2\sqrt{x}\sqrt{x+1}=u^2-1$$

$$2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})=u^2-1$$

$$2\sqrt{x}\cdot u=u^2-1$$

$$\sqrt{x}=\frac{u^2-1}{2u}\Rightarrow x=\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2.$$

Atëherë

$$dx=2\frac{u^2-1}{2u}\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)'du$$

$$dx=\frac{(u-1)(u+1)(u^2+1)}{2u^3}du$$

Atëherë

$$I=\int\frac{\frac{(u-1)(u+1)(u^2+1)}{2u^3}}{1+u}du=\frac{1}{2}\int\frac{(u-1)(u^2+1)}{u^3}du$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{u^3-u^2+u-1}{u^3}du=\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}\ln u-\frac{1}{2u}+\frac{1}{4u^2}+C$$

$$=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x}+C,\qquad x>0.$$

7. Integralin e dhënë e transformojmë si vijon:

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx=\int\frac{1+x+x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx-\int\frac{\frac{1}{2}+x}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\int\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx-\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C$$

$$=\frac{1+2x}{4}\sqrt{1+x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)-\sqrt{1+x+x^2}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)=\frac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2}$$

$$-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C.$$

8. Integralin e dhënë e paraqesim në trajtën

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}.$$

Zëvendësojmë

$$x+\frac{1}{2}=t;\ dx=dt$$

$$I=\int\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}}.$$

Zëvendësojmë $\dfrac{t}{\sqrt{t^2-\frac{5}{4}}}=u,$ atëherë merret:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\frac{3}{8}-t^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+2u\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2u\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x-1)}+(2x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2+x-1)}-(2x+1)\sqrt{2}}\right|+C,\ \text{ku}\ \left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Detyra për ushtrime

Të njehsohen integralet:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x^3})}.$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}+\sqrt[7]{x^2}}.$

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}.$

4. $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3}}.$

5. $\displaystyle\int\frac{1+\sqrt{x+1}}{x+1+\sqrt[3]{x+1}}dx.$

6. $\displaystyle\int\frac{2+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{3+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{x+1}{x-1}}.$

7. $\displaystyle\int\frac{x+\sqrt{x+3}}{x\sqrt{x+3}}dx.$

8. $\displaystyle\int\frac{x+1+\sqrt[4]{x+2}}{(x=1)\sqrt[4]{x+2}}dx.$

9. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n-1}(x-b)^{n+1}}}.$

10. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt[n]{x^2(3-x)}}.$

11. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}.$

12. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx.$

13. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx.$

14. $\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{(x^2-x-1)}}.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+x-1)}(x^2+x-1)}.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-x+1)}(x^2-x+1)}.$

Zëvendësimet e Eulerit

Integrali i formës:

$$I = \int R(x\sqrt{ax^2+bx+c})dx \qquad (1)$$

ku R është funksion racional në lidhje me x dhe $\sqrt{ax^2+bx+c}$, përmes zëvendësimeve të Eulerit shndërrohen në integral të funksionit racional.

Dallojmë këto raste, në të cilat përdorim zëvendësimet e Eulerit.

1) Nëse $a>0,$ merret zëvendësimi

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x+z.$$

Le të marrim p.sh.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+z.$$

Atëherë

$$ax^2+bx+c = ax^2+2\sqrt{a}\cdot x\cdot z+z^2$$

$$bx-2\sqrt{a}\cdot x\cdot z = z^2-c$$

$$x = \frac{z^2-c}{b-2z\sqrt{a}}; \text{ prej nga gjendet } dx.$$

pas zëvendësimit në (1) merret

$$I = \int r(t)dt, \text{ ku } r(t) \text{ paraqet funksion racional.}$$

Ngjashëm do të merrej nëse do të zëvendësohet $\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x+z.$

2) Nëse $c>0,$ merret zëvendësimi:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}.$$

Atëherë

$$ax^2+bx+c=x^2z^2-2xz\sqrt{c}+c$$

$$ax+b=xz^2-2z\sqrt{c}$$

$$x(z^2-a)=b+2z\sqrt{c}$$

$x=\dfrac{b+2z\sqrt{c}}{z^2-a}$ prej nga pastaj caktojmë dx.

Pas zëvendësimit në (1) merret:

$I=\int r(t)dt,$ ku $r(t)$ është funksion racional.

Ngjashëm do të merrejnëse do të zëvendësonim

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz+\sqrt{c}.$$

3) Nëse trinomi kuadratik ka rrënjë të ndryshme reale x_1, x_2 pra nëse $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ atëherë merret zëvendësimi:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)=z^2(x-x_1)^2$$

$$a(x-x_2)=z^2(x-x_1)$$

$$ax-ax_2=z^2x-z^2x_1$$

$$(z^2-a)x=z^2x_1-ax_2$$

$x=\dfrac{z^2x_1-ax_2}{z^2-a}$; prej nga caktojmë dx.

Pas zëvendësimit në (1) merret $\int r(t)dt,$ ku $r(t)$ është funksion racional.

Duke zbatuar zëvendësimet e Eulerit të njehsohen integralet:

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - x + 1}}$. **10.** $\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2 + 3x + 9}} dx.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$.

Zgjidhja.

9. Meqë $a > 0$, merret zëvendësimi i parë i Eulerit:

$$\sqrt{4x^2 - x + 1} = 2x + z$$

Atëherë, $4x^2 - x + 1 = 4x^2 + 4xz + z^2$

$$x + 4xz = 1 - z^2$$

$$x(1+4z) = 1 - z^2; \qquad x = \frac{1-z^2}{1+4z}.$$

Atëherë, $dx = -2\frac{2z^2 + z + 2}{(1+4z)^2} dz.$

Zëvendësojmë në integralin e dhënë në fillim. Merret:

$$\int \frac{-2\frac{2z^2+z+2}{(1+4z)^2}}{\frac{1-z^2}{1+4z}\left(2\frac{1-z^2}{1+4z} + z\right)} dz = -2\int \frac{\frac{2z^2+z+2}{(1+4z)^2}}{\frac{1-z^2}{1+4z}\left(\frac{2-2z^2+z+4z^2}{1+4z}\right)} dz$$

$$-2\int \frac{2z^2+z+2}{(1-z^2)(2z^2+z+2)} dz = 2\int \frac{dz}{z^2-1} = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C.$$

Integrali i fundit paraqet integral racional, me zgjidhjen e të cilit merret:

10. Meqë $c = 9$, merret zëvendësimi i dytë i Eulerit. Merret:

$$\sqrt{-x^2 + 3x + 9} = xz - \sqrt{9} = xz - 3.$$

Atëherë

$$-x^2 + 3x + 9 = x^2z^2 - 6xz + 9$$

$$-x + 3 = xz^2 - 6z$$

$$xz^2 + x = 3 + 6z$$

$$x(z^2 + 1) = 3(1 + 2z)$$

$$x = 3\frac{1+2z}{1+z^2}; \quad dx = 6\frac{1-z^2-z}{(1+z^2)^2}dz.$$

Pra

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+3x+9}}dx = \int \frac{\frac{3(1+2z)}{1+z^2}+1}{\frac{3(1+2z)}{1+z^2}z-3} \cdot 6\frac{1-z^2-z}{(1+z^2)^2}dz$$

$$= 2\int \frac{z^2+6z+4}{(1+z^2)^2}dz$$

Pas zgjidhjes merret:

11. Meqë $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ zbatojmë zëvendësimin e tretë të Eulerit. Kemi:

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} = z(x-2).$$

Atëherë, $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = z^2(x-2)^2$.

D.m.th.

$$(x-3) = z^2(x-2)$$

$$\frac{x-3}{x-2} = z^2; \; x = \frac{3-2z^2}{1-z^2}; \; dx = \frac{2z}{(1-z^2)^2}dz$$

Merret:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}} = \int \frac{\frac{2z}{(1-z^2)^2}}{z\left(\frac{3-2z^2}{1-z^2}-2\right)}dz = \int \frac{\frac{2z}{(1-z^2)^2}}{z\left(\frac{3-2z^2-2+2z^2}{1-z^2}\right)}dz$$

$$= 2\int \frac{dz}{1-z^2} = \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C.$$

Detyra për ushtrime

Të njehsohen integralet:

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$ **18.** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$

19. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2-5x+6}}{x+\sqrt{x^2+5x+6}}dx.$

Disa forma të integraleve iracionale

1. Integrali i formës

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \qquad (1)$$

ku $P_m(x)$ është polinom i shkallës m.

Integrali (1) njehsohet sipas formës:

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

ku $P_{m-1}(x)$ është polinom i shkallës m-1, K- konstantë.

Koeficientët e polinomit $P_{m-1}(x)$ dhe konstanta K caktohen përmes metodës së koeficienteve të pacaktuar.

Të njehsohet integrali:

12. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+4}dx.$

Zgjidhja.

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}dx = \int \frac{x^2\sqrt{x^2+4}\cdot\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

$$= (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4} + K\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Duke derivuar të dy anët e barazimit së fundit merret:

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}=[(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4}]'+K\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}=\left[3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4}\cdot\frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+4}}\right]+\frac{K}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$x^4+4x^2=(Ax^2+2Bx\ \ +C)(x^2+4)+(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x+K$$

Pas transformimeve merret: $A=\frac{1}{4},\ B=0,\ C=\frac{1}{2},\ D=0,\ K=-2.$

Prandaj, pas zgjidhjes merret:

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}dx=\frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C.$$

Detyra për ushtrime

Të njehsohen integralet:

20. $\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx.$ **21.** $\int\frac{x^3-2x+5}{\sqrt{x^2-x-1}}dx.$

2. Integrali i formës

$$\int\frac{dx}{(x-b)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{2}$$

Integrali (2) zgjidhet me anë të zëvendësimit:

$x-b=\frac{1}{t}$. Atëherë $dx=-\frac{dt}{t^2}$.

Të njehsohet integrali:

13. $\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}}.$

Zgjidhja.

Zëvendësojmë $x-1=\frac{1}{t}$; $dx=-\frac{dt}{t^2}$. Merret:

$$I=\int\frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t^2}\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^2+1+\dfrac{1}{t}+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+\dfrac{2}{t}+\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}+2}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{3}{t}+3}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{\dfrac{3t^2+3t+1}{t^2}}}=-\int\frac{t}{\sqrt{3t^2+3t+1}}dt.$$

Integrali në vijim zgjidhet me zëvendësimin e parë (ose të dytë) të Eulerit.

Pas zgjidhjes merret:

Detyra për ushtrime

Të njehsohen integralet:

22. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-x+1}}.$ **23.** $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3\sqrt{x^2 2x+7}}.$

24. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+x+1}}.$

INTEGRIMI I DIFERNCIALIT BINOMIAL

Integrali i formës:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

ku m,n,p janë numra racional dhe $a,b\in R$ quhet **integral i diferencialit binomial**.

Integrali i mësipërmë, në mënyrë elementare mund të zgjidhet vetëm në njërin nga tri rastet vijuese:

1) Nëse p është numër i plotë merret zëvendësimi: $x=t^s$, ku s është shumëfishi më i vogël i përbashkët për emëruesit e numrave m,n.

2) Nëse $p \notin Z$ (pra $p \in Q$), d.m.th. nëse $p = \frac{r}{s}$ dhe $\frac{m+1}{n} \in Z$, atëherë merret zëvendësimi $a + bx^n = t^s$ (s – emëruesi i p – së).

3) Nëse p është thyesë $\left(p = \frac{r}{s} \right)$ dhe $\frac{m+1}{n} \notin Z$, kurse $\frac{m+1}{n} + p \in Z$, merret zëvendësimi $a + bx^n = x^n t^s$.

Të njehsohen integralet:

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$. **15.** $\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} dx$. **16.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Zgjidhja.

14. Integrali i dhënë shënohet në trajtën

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2} dx.$$

Vërejmë se $m = -\frac{1}{2}$; $n = \frac{1}{3}$, $p = -2$.

Meqë $p = -2$ është numër i plotë, zëvendësojmë:

$$x = t^6 \text{ (sepse } [2,3] = 6).$$

$$dx = 6t^5.$$

Merret:

$$I = \int (t^6)^{-\frac{1}{2}}(1+(t^6)^{\frac{1}{3}})^{-2} 6t^5 dt = \int t - 3(1+t^2)^{-2} 6t^5 dt$$

$$= 6\int \frac{t^5 dt}{t^3(1+t^2)^2} = 6\int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2}$$

me zgjidhjen e të cilit merret:

15. Integralin e dhënë e paraqesim në trajtën:

$$I = \int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}.$$

Vërejmë se $m = 1;\ n = \dfrac{2}{3};\ p = -\dfrac{1}{2}.$

Meqë $\dfrac{m+1}{n} = 3$ merret zëvendësimi $1+\sqrt[3]{x^2} = t^2$, prej nga $xdx = 3t(t^2-1)^2\,dt.$

Kemi:

$$I = \int (t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3t(t^2-1)^2\,dt = 3\int (t^2-1)^2\,dt = 3\frac{t^5}{5} - 2t^3 + 3t + C;$$

ku $t = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

16. Integralin e dhënë e paraqesim në trajtën:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\,dx.$$

Vërejmë se $m = 0;\ n = 4;\ p = -\dfrac{1}{4}.$

Vërejmë se $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{1}{4} \notin Z$ por $\dfrac{m+1}{n} + p = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = 0 \in Z.$

D.m.th. zëvendësojmë: $1+x^4 = x^4t^4.$

D.m.th.

$$x^4t^4 - x^4 = 1 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{t^4-1} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{t^4-1}}.$$

Pas derivimit merret:

$$dx = -\frac{t^3}{\sqrt[4]{(t^4-1)^5}}\,dt.$$

Zëvendësojmë në integralin e dhënë. Merret:

$$\int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}} dx = -\int \frac{\sqrt[4]{(t^4-1)}}{t} \frac{t^3}{\sqrt[4]{(t^4-1)^5}} dt = -\int \frac{t^2 dt}{t^4-1}.$$

Integrali i fundit paraqet integral të një funksioni racional.

Pas zgjidhjes merret:

$$I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}\right| - \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$$

Detyra për ushtrime

Të njehsohen integralet:

25. $\int x\sqrt{x}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-1\right)^{-2} dx.$

26. $\int x\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}+1)^{-2} dx.$

27. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

28. $\int \sqrt[4]{4x-x^4}\, dx.$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}\cdot x^5}.$

30. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\, dx.$