

### Propozimi i detyrave për Olimpiadë.

**Detyra 1.** Le të jenë  $a, b, c, d, \ell$  numra të plotë. Të vërtetohet që në qoftë se thyesa  $\frac{a\ell + b}{c\ell + d}$  mund të thjeshtohet me numrin  $k$ , atëherë numri  $ad - bc$  plotëpjesëtohet me  $k$ .

**Zgjidhja.** Nga fakti se thyesa  $\frac{a\ell + b}{c\ell + d}$  plotëpjesëtohet me numrin  $k$  rrjedh se numëruesi  $a\ell + b$  dhe emruesi  $c\ell + d$  i saj plotëpjesëtohen me  $k$ . Prandaj, ekzistojnë numrat e plotë  $m, n$  të tillë që :

$$a\ell + b = km \quad \text{dhe} \quad c\ell + d = kn.$$

Duke shumëzuar barazimin e parë me  $c$  e të dytin me  $a$  dhe duke zbritur anë për anë barazimet e fituara në atë mënyrë, gjejmë se:

$$c(a\ell + b) - a(c\ell + d) = ckm - akn$$

prej nga rrjedh se:

$$bc - ad = k(cm - an),$$

që d.m.th. se  $bc - ad$  plotëpjesëtohet me  $k$ .

**Detyra 2.** A ekziston funksioni linear bijektiv  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  i tillë që për çdo  $x \in \mathbf{R}$  të vlej

$$f(f(x)) - f(x) = 30x + 1872?$$

Nëse ekziston, të gjendet.

**Zgjidhja.** Funksioni linear  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  është i formës  $f(x) = ax + b$ . Funksioni i tillë është bijeksion atëherë dhe vetëm atëherë kur  $a \neq 0$ . Në këtë rast, vlen:

$$f(f(x)) - f(x) = f(ax + b) - (ax + b) = a(ax + b) + b - ax - b = a(a - 1)x + ab.$$

Prandaj, që të ekzistoj funksioni linear bijektiv që e plotëson kushtin e detyrës, duhet të jetë:

$$a(a - 1)x + ab = 30x + 1872,$$

prej nga rrjedh se  $a(a - 1) = 30$  dhe  $ab = 1872$ , d.m.th.  $a = 6$  dhe  $b = 312$ . Kështu, funksioni i kërkuar ekziston për  $a = 6$  dhe  $b = 312$  dhe ai është  $f(x) = 6x + 312$ .

**Detyra 3.** Për cilat vlera të numrit real  $a$  ekuacioni  $||x| - 2| = a$  ka numrin më të madh të zgjidhjeve reale të ndryshme ?

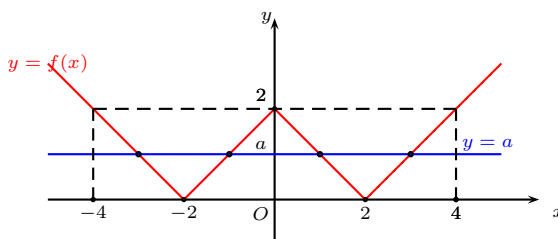
**Zgjidhja.** Le të jetë  $f(x) = ||x| - 2|$ . Meqë

$$|x| - 2 = \begin{cases} -x - 2 & \text{për } x \leq 0 \\ x - 2 & \text{për } x \geq 0 \end{cases},$$

përfundojmë se:

$$\begin{aligned}
 f(x) = ||x| - 2| &= \begin{cases} -(|x| - 2) & \text{për } |x| - 2 \leq 0 \\ |x| - 2 & \text{për } |x| - 2 \geq 0 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} -|x| + 2 & \text{për } |x| \leq 2 \\ |x| - 2 & \text{për } |x| \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -|x| + 2 & \text{për } -2 \leq x \leq 2, \\ |x| - 2 & \text{për } x \leq -2 \wedge x \geq 2 \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} |x| - 2 & \text{për } x \leq -2, \\ -|x| + 2 & \text{për } -2 \leq x \leq 0, \\ -|x| + 2 & \text{për } 0 \leq x \leq 2, \\ |x| - 2 & \text{për } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -x - 2 & \text{për } x \leq -2, \\ x + 2 & \text{për } -2 \leq x \leq 0, \\ -x + 2 & \text{për } 0 \leq x \leq 2, \\ x - 2 & \text{për } x \geq 2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

kështu që grafiku i funksionit  $f(x)$  duket si në figurën vijuese:



Tash ekuacioni i dhënë merr formën  $f(x) = a$  dhe zgjidhjet e tij janë pikëprerjet e grafikut të funksionit  $y = f(x)$  me drejtëzën  $y = a$  e cila është paralele me boshtin  $Ox$  dhe në boshtin  $Oy$  ndërpret segmentin me madhësi  $a$ . Prandaj, siç shihet nga figura e mësipërme grafiku i funksionit  $y = f(x)$  dhe drejtëza  $y = a$  kanë numrin më të madh të pikave prerëse nëse  $0 < a < 2$ . Prandaj, për  $a \in (0, 2)$  ekuacioni  $f(x) = a \iff ||x| - 2| = a$  ka 4 zgjidhje reale të ndryshmenumrin që është numri më i madh i zgjidhjeve të tilla. (Vëreni që për  $a < 0$  ekuacioni nuk ka asnjë zgjidhje reale; për  $a = 0$  ekuacioni ka 2 zgjidhje ( $x = -2, x = 2$ ); për  $a = 2$  ekuacioni ka 3 zgjidhje reale të ndryshme ( $x = 0, x = -4, x = 4$ ); për  $a > 2$  ka 2 zgjidhje të ndryshme).

**Detyra 4.** Në qoftë se  $p, q, r, s$  janë numra pozitiv, të vërtetohet se:

$$\frac{(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1)(r^2 + r + 1)(s^2 + s + 1)}{pqrs} \geq 81.$$

**Zgjidhja.** Meqë

$$\begin{aligned}
 &\frac{(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1)(r^2 + r + 1)(s^2 + s + 1)}{pqrs} = \\
 &= \frac{p^2 + p + 1}{p} + \frac{q^2 + q + 1}{q} \cdot \frac{r^2 + r + 1}{r} \cdot \frac{s^2 + s + 1}{s} \\
 &= \left(p + \frac{1}{p} + 1\right) \cdot \left(q + \frac{1}{q} + 1\right) \cdot \left(r + \frac{1}{r} + 1\right) \cdot \left(s + \frac{1}{s}\right),
 \end{aligned}$$

dhe meqë për çdo numër pozitiv  $a > 0$  vlen

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

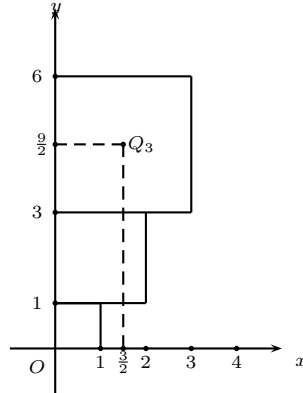
(sepse nga  $(a - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2$ ),  
përfundojmë se

$$\frac{(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1)(r^2 + r + 1)(s^2 + s + 1)}{pqrs} \geq (2+1) \cdot (2+1) \cdot (2+1) \cdot (2+1) = 3^4 = 81.$$

**Vërejtje.** Ngjashëm, nëse  $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , atëherë vërtetohet se:

$$\frac{(a_1^2 + a_1 + 1)(a_2^2 + a_2 + 1) \cdots (a_n^2 + a_n + 1)}{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq 3^n.$$

**Detyra 5.** Në figurë është paraqitur vargu i katrorëve me gjatësi brinjësh  $1, 2, 3, \dots, n$  njësi, përkatësisht. Të tregohet se qendrat e katrorëve të tillë i takojnë parabolës  $y = 2x^2$ .



**Zgjidhja.** Le të jetë  $Q_k(x_k, y_k)$  qendra e katrorit të  $k$ -të. Atëherë  $x_k = \frac{k}{2}$   
dhe

$$y_k = 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + k = \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k^2}{2} = 2\left(\frac{k}{2}\right)^2 = 2x_k^2.$$

d.m.th/  $y_k = 2x_k^2$ . Kështu, treguam se koordinatat  $(x_k, y_k)$  të qendrës  $Q_k$  të katrorit të çfarëdoshëm të vargut të mësipërm i takon parabolës  $y = 2x^2$ . Prandaj, të gjitha qendrat e katrorëve të vargut të dhënë i takojnë parabolës  $y = x^2$ .

**Detyra 6.** Ekuacionet  $x^2 + ax + b = 0$  dhe  $x^2 + px + q = 0$  e kanë një zgjidhje të përbashkët. Të gjendet ekuacioni katror zgjidhjet e të cilit janë dy zgjidhjet tjera të ekuacioneve të dhëna.

**Zgjidhja.** Do të dallojmë dy raste: I.  $a \neq p$  dhe II.  $a = p$ .

Rasti I. Le të jetë  $a \neq p$  dhe letë jenë  $x_1, x_2$  zgjidhjet e ekuacionit të parë kurse  $x_1, x_3$  zgjidhjet e ekuacionit të dytë. Atëherë, sipas formulave të Viett-it, kemi:

$$x_1 + x_2 = -a \quad (1)$$

$$x_1 \cdot x_2 = b \quad (2)$$

$$x_1 + x_3 = -p \quad (3)$$

$$x_1 \cdot x_3 = q \quad (4)$$

Meqë  $x_1$  është zgjidhje e përbashkët e ekuacioneve të dhëna, kemi:

$$x_1^2 + ax_1 + b = 0 \quad (5)$$

$$x_1^2 = px_1 + q = 0 \quad (6)$$

Duke zbritur anë për anë barazimin (5) nga barazimi (6) gjejmë se:  $(p - a)x_1 + q - b = 0$ , prej nga (meqë  $p - a \neq 0$ ):

$$x_1 = \frac{b - q}{p - a}. \quad (7)$$

Duke mbledhur anë për anë barazimet (1) dhe (3) gjejmë se:  $2x_1 + x_2 + x_3 = -(a + p)$  prej nga  $x_2 + x_3 = -(a + p) - 2x_1$ , kështu që sipas (7), rrjedh se

$$x_2 + x_3 = -(a + p) - \frac{2(b - q)}{p - a} \quad (8)$$

Po ashtu, duke shumëzuar anë për anë barazimet (2) dhe (4), gjejmë se:

$$x_1^2 x_2 x_3 = bq. \quad (9)$$

Në qoftë se  $b \neq q$ , nga (7) rrjedh se  $x_1 \neq 0$  kurse nga (9) dhe (7) rrjedh se:

$$x_2 x_3 = \frac{bq}{x_1^2} = \frac{bq(p - a)^2}{(b - q)^2}. \quad (10)$$

Kështu, në rastin kur  $a \neq p$  dhe  $b \neq q$  duke pasur parasysh (8) dhe (10), sipas formulave të Viett-it, përfundojmë se ekuacioni i kërkuar katror që për zgjidhje ka  $x_2$  dhe  $x_3$  është:

$$x^2 + [a + p + \frac{2(b - q)}{p - a}]x + (\frac{p - a}{b - q})^2 bq = 0.$$

Në qoftë se  $b = q$  atëherë nga (7) rrjedh se  $x_1 = 0$  kështu që, sipas (3) dhe (4), edhe  $b = 0, q = 0$ . Prandaj, ekuacionet e dhëna janë të formave:

$$x^2 + ax = 0 \quad \text{dhe} \quad x^2 + px = 0.$$

Në këtë rast,  $x_1 = 0$  është zgjidhja e përbashkët e tyre kurse  $x_2 = -a$  dhe  $x_3 = -p$  janë dy zgjidhjet tjera të tyre. Rrjedhimisht, sipas formulave të Viett-it, ekuacioni i kërkuar katror që për zgjidhje ka  $x_2 = -a$  dhe  $x_3 = -p$  është:

$$x^2 + (a + p)x + ap = 0.$$

Rasti II. Në qoftë se  $a = p$ , ekuacionet e dhëna janë:

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \text{dhe} \quad x^2 + ax + q = 0,$$

prej nga, meqë  $x_1$  është zgjidhja e përbashkët e tyre, rrjedh se:

$$x_1^2 + ax_1 + b = 0 = x_1^2 + ax_1 + q,$$

kështu që  $b = q$ . Rrjedhimisht, të dy ekuacionet e dhëna janë të njëjta dhe  $x_2 = x_3$ . Prandaj, ekuacioni i kërkuar katror, në këtë rast do të jetë

$$(x - x_2)^2 = 0.$$

**Detyra 7.** Le të jetë  $\alpha$  kënd i ngushtë. Të vërtetohet pabarazimi:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

**Zgjidhja.**

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) &= 1 + \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= 1 + \frac{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 1 + \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha + 1)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)} = \\ &= 1 + \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha - 1)} = 1 + \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha - 1)} = \\ &= 1 + \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha - 1)} = 1 + \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha - 1)} = \\ &= 1 + \frac{2}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1}, \end{aligned}$$

d.m.th.:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) = 1 + \frac{2}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1}. \quad (1)$$

nga  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  rrjedh se  $1 + \sin \alpha + \cos \alpha < \sqrt{2}$ , kështu që  $0 < \sin \alpha + \cos \alpha - 1 < \sqrt{2} - 1$ , prej nga rrjedh se:

$$\frac{2}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1} \geq \frac{2}{\sqrt{2} - 1}. \quad (2)$$

Nga (1) dhe (2) rrjedh se:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{\sqrt{2} - 1} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

**Detyra 8.** Të vërtetohet se për çdo numër natyral  $n$  vlen barazimi:

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ rrënjë}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

**Zgjidhja.** Vërtetimin e bëjmë me anën e induksionit sipas numrit  $n$ .

Meqë

$$\sqrt{2} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{1+1}},$$

përfundojmë se barazimi i dhënë vlen për  $n = 1$ .

E zëmë se barazimi i dhënë vlen për numrin e çfarëdoshëm natyral  $n = k$ , d.m.th. se vlen:

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{nk \text{ rrënjë}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}. \quad (1)$$

Atëherë:

$$\begin{aligned} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{(k+1) \text{ rrënjë}} &= \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}_{k \text{ rrënjë}}} \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}} \quad (\text{sipas (1)}) = \sqrt{2(1 + \cos \frac{\pi}{2^{k+1}})} = \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\pi}{2 \cdot 2^{k+1}}} = \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{2^{(k+1)+1}}, \end{aligned}$$

që d.m.th. se barazimi i dhënë vlen edhe për  $n = k + 1$ . Prandaj, në sajë të parimit të induksionit matematik, përfundojmë se barazimi i dhënë vlen për çdo numër natyral  $n$ .

**Detyra 9.** Të vërtetohet se

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9 = \log_{10} 2.$$

**Zgjidhja.** Vejmë:

$$\log_3 2 = x_1, \log_4 3 = x_2, \log_5 4 = x_3, \log_6 5 = x_4,$$

$$\log_7 6 = x_5, \log_8 7 = x_6, \log_9 8 = x_7, \log_{10} 9 = x_8.$$

Atëherë,:

$$3^{x_1} = 2, 4^{x_2} = 3, 5^{x_3} = 4, 6^{x_4} = 5, 7^{x_5} = 6, 8^{x_6} = 7, 9^{x_7} = 8, 10^{x_8} = 9.$$

Prandaj:

$$2 = 3^{x_1} = (4^{x_2})^{x_1} = ((5^{x_3})^{x_2})^{x_1} = (((6^{x_4})^{x_3})^{x_2})^{x_1} = \dots = (\dots(((10^{x_8})^{x_7})^{x_6 \dots})^{x_2})^{x_1} = 10^{x_1 x_2 x_3 \dots x_7 x_8}$$

d.m.th.

$$10^{x_1 x_2 x_3 \dots x_7 x_8} = 2$$

prej nga rrjedh se:

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_7 x_8 = \log_{10} 2,$$

d.m.th.:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9 = \log_{10} 2,$$

çka duhej vërtetuar.

**Detyra 10.** Të zgjidhet ekuacioni:

$$\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3).$$

**Zgjidhja.** Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me :

$$\log_2(4^x + 4) = x \log_2 2 + \log_2(2^{x+1} - 3)$$

$$\log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3)$$

$$\log_2(4^x + 4) = \log_2[2^x(2^{x+1} - 3)],$$

prej nga rrjedh se:

$$4^x + 4 = 2^x(2^{x+1} - 3)$$

$$(2^x)^2 + 4 = 2 \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x$$

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 4 = 0.$$

Pas zëvendësimit

$$2^x = t \tag{1}$$

marrim ekuacionin katror

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

zgjidhjet e të cilit janë  $t_1 = -1$  dhe  $t_2 = 4$ . Nga (1) për  $t = t_1 = -1$  gjejmë se  $2^x = -1$  gjë që është e pamundur sepse  $2^x > 0$  për çdo  $x \in \mathbf{R}$ . Po ashtu, nga (1) për  $t = t_2 = 4 = 2^2$  gjejmë që  $2^x = 2^2$ , d.m.th.  $x = 2$ . Rrjedhimisht,  $x = 2$  është zgjidhja e ekuacionit të dhënë.

**Detyra 11.** Të zgjidhet ekuacioni eksponencial  $\sqrt{3^x} + 1 = 2^x$ .

**Zgjidhja.** Pas pjesëtimit me  $2^x$  ekuacioni i dhënë merr formën:

$$\frac{\sqrt{3^x}}{2^x} + \frac{1}{2^x} = 1,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1,$$

ose, meqë  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$  dhe  $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ$ ,

$$(\sin 60^\circ)^x + (\cos 60^\circ)^x = 1,$$

prej nga, në bazë të identitetit themelor të trigonometrisë  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , rrjedh se  $x = 2$ .

**Detyra 12.** Të gjendet bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit

$$1 + 2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x < 6^x.$$

**Zgjidhja.** Duke pjesëtuar të dy anët e inekuacionit të dhënë me  $6^x > 0$  fitojmë inekuacionin

$$\left(\frac{1}{6}\right)^x + 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1,$$

i cili është ekuivalent me inekuacionin e dhënë. Nëse vejmë

$$f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

inekuacioni i fundit merr formën

$$f(x) < 1.$$

Vërejmë se

$$f(2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{36} + \frac{2}{9} + \frac{3}{4} = 1.$$

Prandaj, inekuacioni i dhënë është ekuivalent me inekuacionin

$$f(x) < f(2). \quad (*)$$

Meqë  $\frac{1}{6} < 1$ ,  $\frac{1}{3} < 1$ ,  $\frac{1}{2} < 1$  përfundojmë se funksionet eksponenciale  $\left(\frac{1}{6}\right)^x$ ,  $\left(\frac{1}{3}\right)^x$  dhe  $\left(\frac{1}{2}\right)^x$  janë monotono zvogëluese, kështu që edhe  $f(x)$  si shumë e tyre, është funksion monotono zvogëlues. Duke pasur parasysh këtë fakt, inekuacioni (\*) është ekuivalent me  $x > 2$ . Prandaj, bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë i cili është ekuivalent me (\*) është  $(2, +\infty)$ .

**Detyra 13.** Të zgjidhet ekuacioni:

$$3 + 5 + 7 + \dots + 15x = 2808.$$

**Zgjidhja.** Le të jetë  $n$  numri i anëtarëve të të vargut arithmetik në anën e majtë të ekuacionit të dhënë. Atëherë,  $a_1 = 3, a_n = 15x$  dhe  $d = 2$  janë, përkatësisht, anëtari i parë, anëtari i  $n$ -të dhe diferenca e atij vargu arithmetik kurse  $S_n = 2808$  është shuma e  $n$  anëtarëve të parë të atij vargu. Meqë

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{3 + 15x}{2} \cdot n$$

përfundojmë se:

$$\frac{3 + 15x}{2} \cdot n = 2808 \implies (3 + 15x)n = 2 \cdot 2808 \quad (1)$$

Nga ana tjetër, nga  $a_n = a_1 + (n-1)d$  meqë  $a_n = 15x, a_1 = 3$  dhe  $d = 2$ , rrjedh se  $15x = 3 + 2(n-1)$  e prej këtu:  $n = \frac{15x-3}{2} + 1 = \frac{15x-1}{2}$ . Duke zëvendësuar këtë vlerë të  $n$  në (1) gjejmë se:

$$\begin{aligned} (3 + 15x) \cdot \frac{15x - 1}{2} &= 2 \cdot 2808 \\ (3 + 15x)(15x - 1) &= 4 \cdot 2808 \\ (15x)^2 + 2 \cdot 15x - 3 - 11232 &= 0 \\ 225x^2 + 30x - 11235 &= 0 \\ 15x^2 + 2x - 749 &= 0, \end{aligned}$$

prej nga rrjedh se  $x_1 = 7$  dhe  $x_2 = -\frac{107}{15} = -7\frac{2}{15}$ . Meqë të gjithë anëtarët e vargut arithmetik në anën e majtë të ekuacionit të dhënë janë numra pozitiv, pra edhe  $15x > 0$ , d.m.th.  $x > 0$ , meqë  $x_2 < 0$ , përfundojmë  $x_2$  nuk është zgjidhje e ekuacionit të dhënë. Pra, e vetmja zgjidhje e kuacionit të dhënë është  $x = x_1 = 7$ .

**Detyra 14.** Në rrafshin horizontal nga tri pika të larguara nga baza e antenës televizive për 100 m, 200 m dhe 300 m ajo antenë shihet nën këndet  $\alpha, \beta, \gamma$ , përkatësisht, shuma e të cilave është  $90^\circ$ . Të gjendet lartësia e antenës!

**Zgjidhja.** Le të jetë  $x$  m lartësia e antenë. Meqë nga pikat e larguara për 100m, 200 m dhe 300m antena shihet nën këndet  $\alpha, \beta, \gamma$ , përfundojmë se:

$$\tan \alpha = \frac{x}{100}, \quad \tan \beta = \frac{x}{200}, \quad \tan \gamma = \frac{x}{300}.$$

Meqë nga  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$  rrjedh se  $\gamma = 90^\circ - (\alpha + \beta)$ , përfundojmë se:

$$\frac{x}{300} = \tan \gamma = \tan[90^\circ - (\alpha + \beta)] = \cot(\alpha + \beta) = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}}$$

$$= \frac{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{1 - \frac{x}{100} \cdot \frac{x}{200}}{\frac{x}{100} + \frac{x}{200}} = \frac{\frac{100 \cdot 200 - x^2}{100 \cdot 200}}{\frac{3x}{200}} = \frac{100 \cdot 200 - x^2}{300x}$$

d.m.th.

$$\begin{aligned} \frac{x}{300} &= \frac{100 \cdot 200 - x^2}{300x} \implies x^2 = 100 \cdot 200 - x^2 \\ \implies 2x^2 &= 100 \cdot 200 \implies x^2 = 100^2 \implies x = 100, \end{aligned}$$

sepse  $x > 0$ . Pra antena është e lartë 100m.

**Detyra 15.** Le të jenë  $u, v, w$  tre numra kompleks me moduj të barabartë  $|u| = |v| = |w| = r$ . Të vërtetohet se

$$\left| \frac{uv + vw + wu}{u + v + w} \right| = r.$$

**Zgjidhja.** Meqë  $|u| = |v| = |w| = r$ , numrat kompleks  $u, v, w$  mund të shkruhen në formën

$$u = rz_1, \quad v = rz_2, \quad w = rz_3,$$

ku  $z_1, z_2, z_3$  janë numra kompleks të tillë që  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ . Atëherë barazimi që duhet vërtetuar merr formën:

$$\left| \frac{r^2 z_1 z_2 + r^2 z_2 z_3 + r^2 z_3 z_1}{r(z_1 + z_2 + z_3)} \right| = r \iff \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = 1.$$

Shprehjen e fundit e shndërrojmë kështu:

$$|z_1 z_2 z_3| \cdot \left| \frac{\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = 1.$$

Meqë nga  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  rrjedh se  $|z_1 z_2 z_3| = |z_1| |z_2| |z_3| = 1$ , dhe meqë  $\frac{1}{z_i} = \bar{z}_i, i = 1, 2, 3$ , barazimi i fundit merr formën:

$$\left| \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = 1 \iff \left| \frac{\overline{z_1 + z_2 + z_3}}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = 1 \iff \frac{|z_1 + z_2 + z_3|}{|z_1 + z_2 + z_3|} = 1 \quad (*)$$

Barazimi i fundit është i vërtetë sepse moduli i çdo numri kompleks është i barabartë me modulin e të koniuguarit të tij ( $|z| = |\bar{z}|$ ). Prandaj, i vërtetë është edhe barazimi i dhënë që është ekuivalent me barazimin e vërtetuar (\*).

**Detyra 16.** Le të jetë  $S$  syprina e sipërfaqes katërkëndëshe konvekse me gjatësi brinjësh  $a, b, c, d$ . Të vërtetohet se

$$S \leq \frac{1}{4}(a + c)(b + d).$$

**Zgjidhja.** Le të jetë  $ABCD$  sipërfaqja e dhënë katërkëndëshe dhe  $|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d$  le të jenë gjatësitë e brinjëve të saj. Atëherë:

$$S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} \quad (1)$$

$$S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} \quad (2)$$

Në qoftë se  $x, y$  janë gjatësitë e dy brinjëve të një sipërfaqeje trekëndëshe dhe  $\alpha$  këndi ndërmjet tyre, atëherë syprina e saj është:

$$S_{\Delta} = \frac{xy}{2} \cdot \sin \alpha.$$

Meqë,  $\sin \alpha \leq 1$ , përfundojmë se

$$S_{\Delta} \leq \frac{xy}{2}. \quad (3)$$

Duke pasur parasysh (3), nga (1) dhe (2) rrjedh se:

$$S \leq \frac{ad}{2} + \frac{bc}{2} \quad \text{dhe} \quad S \leq \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$$

Duke mbledhur anë për anë dy pabarazimet e fundit, gjejmë se:

$$2S \leq \frac{1}{2}(ad + bc + ab + cd) = \frac{1}{2}[a(b+d) + c(b+d)] = \frac{1}{2}(a+c)(b+d),$$

prej nga:

$$S \leq \frac{1}{4}(a+c)(b+d),$$

çka duhej vërtetuar.

**Detyra 17.** a) Le të jetë  $Q$  qendra e rëndesës (d.m.th. pikëprerja e mesoreve) së trekëndëshit  $ABC$  dhe  $X$  pikë e çfarëdoshme brenda atij trekëndëshi. Të vërtetohet se:

$$3\overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}.$$

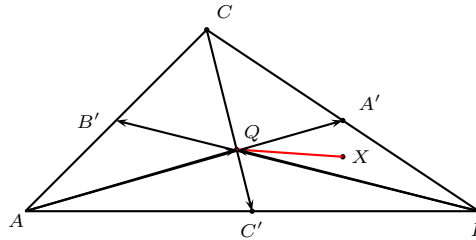
b) Le të jenë  $M, N$  pika të brinjës  $BC$ ,  $P, R$  pika të brinjës  $CA$ ,  $S, T$  pika të brinjës  $AB$  të tilla që  $MR \parallel AB$ ,  $PT \parallel BC$ ,  $SN \parallel CA$  dhe  $MR \cap PT \cap SN = \{X\}$ . Le të jenë, më tej,  $A_1, B_1, C_1$  meset e segmenteve  $MN, PR$ , e  $ST$ , përkatësisht. Të vërtetohet se vlen:

$$\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{XQ}.$$

**Zgjidhja.** a) Le të jenë  $A', B', C'$  meset e brinjëve  $BC, CA$  e  $AB$ , përkatësisht. Atëherë

$$\overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AQ}, \quad \overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BQ}, \quad \overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{CQ}.$$

(Shih figurën)



Meqë qendra e rëndesës  $Q$  i ndan mesoret  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $\overrightarrow{BB'}$ ,  $\overrightarrow{CC'}$  në përpjesën

2 : 1, përfundojmë se:

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}, \quad \overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}, \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}.$$

Prandaj,

$$\overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \quad \overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \quad \overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}.$$

Duke i mbledhur anë për anë këto tri barazime gjejmë se:

$$3\overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}). \quad (1)$$

Meqë:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 0, \end{aligned}$$

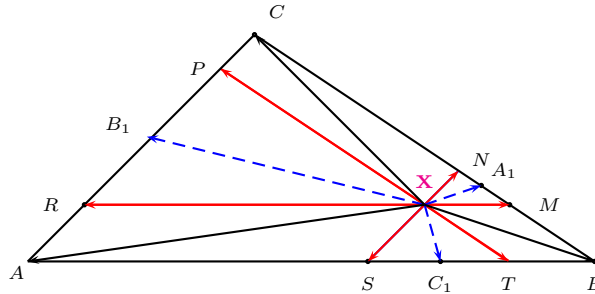
nga (1) rrjedh se  $3\overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$ , çka duhej vërtetuar.

b) Vërejmë që  $A_1$ , si mes i segmentit  $MN$ , është pikëprerje e diagonaleve të paralelogramit të ndërtuar mbi vektorët  $\overrightarrow{XM}$  dhe  $\overrightarrow{XN}$ , kështu që:

$$\overrightarrow{XA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XN}).$$

Ngjashëm përfundojmë se edhe:

$$\overrightarrow{XB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XR}) \quad \overrightarrow{XC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XS} + \overrightarrow{XT}).$$



Nga ana tjetër, sipas kushteve të detyrës (shih figurën e mësipërme), katërkëndëshi  $XTBM$  është paralelogram me diagonalen  $\overrightarrow{XB_1}$ , prandaj:

$$\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XT}.$$

Po ashtu, sipas kushteve të detyrës,  $XSAR$  dhe  $XNCP$  janë paralelograme me dijagonalet  $\overrightarrow{XA}$  e  $\overrightarrow{XC}$ , përkatësisht, prej nga rrjedh se:

$$\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XR} + \overrightarrow{XS} \quad \text{dhe} \quad \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XP}.$$

Duke pasur parasysh barazimet e mësipërme, përfundojmë se:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} &= \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XN}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{XP} + \overrightarrow{XR}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{XS} + \overrightarrow{XT}) \\ &= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{XR} + \overrightarrow{XS}) + (\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XT}) + (\overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XP})] \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}) \end{aligned}$$

Prej këtu, duke pasur parasysh barazimin  $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = 3\overrightarrow{XQ}$  të vërtetuar në a), përfundojmë se

$$\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{XC_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{XQ},$$

çka duhej vërtetuar.

**Detyra 18.** Le të jenë  $|\overrightarrow{CB}| = a$ ,  $|\overrightarrow{CA}| = b$  dhe  $|\overrightarrow{AB}| = c$  gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit  $ABC$ . Në qoftë se  $D$  është mesi i brinjës  $AB$ , të vërtetohet se vlen:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{4}.$$

( $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$  shënon prodhimin numerik (skalar) të vektorëve  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CD}$ ).

**Zgjidhja.** Meqë  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$  përfundojmë se  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ , prandaj:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CA} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2}(|\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})) = \frac{1}{2}[b^2 + ab \cos \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})], \end{aligned}$$

d.m.th.

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}[b^2 + ab \cos \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})]. \quad (1)$$

Sipas teoremës së kosinusit kemi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}),$$

kështu që:

$$ab \cos \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}. \quad (2)$$

Nga (1) dhe (2) rrjedh se

$$\overline{CA} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \left( b^2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right) = \frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{4},$$

çka duhej vërtetuar.

**Detyra 19.** Sa numra natyral më të vegjël ose të barabartë me 10000 janë të plotpjesëtueshëm me 4 ose me 6?

**Zgjidhja.**

$$A = \{4k : k \in \mathbf{N} \wedge 4k \leq 10000\}$$

është bashkësia e të gjithë numrave natyral të plotpjesëtueshëm me 4, kurse

$$B = \{6k : k \in \mathbf{N} \wedge 6k \leq 10000\}$$

është bashkësia e të gjithë numrave natyral të plotpjesëtueshëm me 6. Atëherë,  $A \cap B$  është bashkësia e të gjithë numrave natyral më të vegjël ose të barabartë se 10000 që plotpjesëtohen me 4 dhe me 6, d.m.th. bashkësia e të gjithë numrave natyral më të vegjël ose të barabartë se 10000 që plotpjesëtohen me  $shmvp(4, 6) = 12$ . Pra:

$$A \cap B = \{12k : k \in \mathbf{N} \wedge 12k \leq 10000\}.$$

Ndërkaq,  $A \cup B$  është bashkësia e të gjithë numrave natyral më të vegjël ose të barabartë se 10000 që plotpjesëtohen me 4 ose me 6. Kërkohej të gjendet numri  $|A \cup B|$  i elementeve të bashkësis  $A \cup B$ . Sipas parimit të përfshirje-përjashtimit (inclusion- exclusion principle) vlen:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad (*)$$

Meqë nga  $4k \leq 10000 \Rightarrow k \leq \frac{10000}{4} = 2500$ , përfundojmë se  $|A| = 2500$ . Ngjashëm, meqë nga  $6k \leq 10000 \Rightarrow k \leq \frac{10000}{6} = 1666,66\dots$  përfundojmë se  $|B| = 1666$ , kurse nga  $12k \leq 10000 \Rightarrow k \leq \frac{10000}{12} = 833,33\dots$ , kështu që  $|A \cap B| = 833$ . Prandaj, nga (\*) rrjedh se:

$$|A \cup B| = 2500 + 1666 - 833 = 3333.$$

Kështu, 3333 numra natyral më të vegjël ose të barabartë me 10000 plotpjesëtohen ose me 4 ose me 6.

**Detyra 20.** Sa është numri i vargje të fundme (stringjeve) prej 5 shifrave dhjetore që i kanë saktësisht 4 shifra të barabarta me 5.

**Zgjidhja.** Ekzistojnë  $\binom{5}{4} = 5$  lloje të ndryshme të vargjeve të fundme prej 5 shifrave dhjetore 4 shifra të të cilëve janë të barabarta me 5, dhe ato janë vargjet e tilla që:

I. katër shifrat e para i kanë të barabarta me 5;

- II. tri shifrate para dhe shifrën e pestë e kanë të barabartë me 5;
- III. dy shifrat e para si dhe dy shifrat e fundit (d.m.th. të katërtën dhe të pestën) i kanë të barabarta me 5.
- IV. shifrën e parë dhe tri shifrat e fundit i kanë të barabarta me 5;
- V. katër shifrat e fundit i kanë të barabarta me 5.

Vargu i secilit nga pesë llojet e mësipërme i ka katër shifra të fiksuara (të barabarta me 5) të cilat mund të zgjedhen në një mënyrë të vetme kurse njëra nga shifrat e tyre është e çfarëdoshme dhe mund të zgjedhet në 10 mënyra të ndryshme (prej 0–9). Prandaj, sipas rregullës së prodhimit, kemi  $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 = 10$  vargje të secilit nga pesë llojet e mësipërme, kurse sipas rregullës së shumëzimit  $10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50$  është numri i të gjitha vargjeve prej pesë shifrave dhjetore që i kanë saktësisht katër shifra të barabarta me 5.

**Detyra 21.** Nxënësit e një klase ndjekin kurset e matematikës dhe informatikës ose që të dy këto kurse. Dihet se kursin e matematikës e ndjekin 24 nxënës, kursin e informatikës e ndjekin 29 nxënës kurse që të dy këto kurse i ndjekin 15 nxënës. Sa nxënës i ka

- a) i ka ajo klasë ?
- b) e ndjekin vetëm kursin e matematikës ?
- c) e ndjekin vetëm kursin e informatikës ?

**Zgjidhja.** Le të jetë  $A$  bashkësia e nxënësve të klasës që ndjekin kursin e matematikës kurse  $B$  bashkësia e nxënësve që ndjekin kursin e informatikës. Atëherë,  $A \cup B$  është bashkësia e të gjithë nxënësve të asaj klase,  $A \cap B$  është bashkësia e nxënësve të klasës që ndjekin të dy kurset,  $A \setminus (A \cap B)$  është bashkësia e nxënësve që ndjekin vetëm kursin e matematikës, kurse  $B \setminus (A \cap B)$  është bashkësia e nxënësve që ndjekin vetëm kursin e informatikës. Prandaj, sipas parimit të përfshirjes - përjashtimit, përfundojmë se:

- a)  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 24 + 29 - 15 = 38$  nxënës i ka gjithësejt klasa;
- b)  $|A \setminus (A \cap B)| = |A| - |A \cap B| = 24 - 15 = 9$  nxënës e ndjekin vetëm kursin e matematikës;
- c)  $|B \setminus (A \cap B)| = |B| - |A \cap B| = 29 - 15 = 14$  nxënës e ndjekin vetëm kursin e informatikës.

**Detyra 22.** Trajneri i ekipit të futbollit ka në dispozicion 3 portier, 7 mbrojtës, 7 mesfushorë dhe 6 sulmues. Në sa mënyra mund të bëhet zgjedhja e ekipit që përbëhet prej 1 portieri, 4 mbrojtësve, 4 mesfushorëve dhe 2 sulmuesve?

**Zgjidhja.** 1 portier në mesin e 3 portierve mund të zgjedhet në  $C(3, 1) = \binom{3}{1} = 3$  mënyra të ndryshme; 4 mbrojtës në mesin e 7 mbrojtësve mund të zgjedhen në  $C(7, 4) = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 35$  mënyra të ndryshme; 4 mesfushorë në mesin e 7 mesfushorëve mund të zgjedhen në  $C(7, 4) = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$  mënyra të ndryshme; 2 sulmues në mesin e 6 sulmuesve mund të zgjedhen në

$C(6, 2) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 1 \cdot 4!} = 15$  mënyra të ndryshme. Prandaj, i tërë ekipi mund të zgjedhet në

$$C(3, 1) \cdot C(7, 4) \cdot C(7, 4) \cdot C(6, 2) = 3 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 15 = 55\,125$$

mënyra të ndryshme.

**Detyra 23.** Të vërtetohet që në qoftë se çifti  $(x, y)$  është zgjidhje e sistemit të ekuacioneve

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0 \end{cases}$$

atëherë  $(x, y)$  është zgjidhje edhe e ekuacionit

$$xy - 12x + 15y = 0.$$

**Zgjidhja.** Ekuacionin e parë të sistemit të dhënë e faktorizojmë kështu:

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 &= x^2 - 2xy + y^2 - xy + y^2 + x - y = \\ &= (x - y)^2 - y(x - y) + (x - y) = (x - y)(x - y - y + 1) \\ &= (x - y)(x - 2y + 1) \end{aligned}$$

Prandaj,

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \iff (x - y)(x - 2y + 1) = 0 \iff x - y = 0 \vee x - 2y + 1 = 0,$$

kështu që sistemi i dhënë është ekuivalent me këto dy sisteme:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0 \end{cases} \quad (I) \quad \text{dhe} \quad \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Meqë

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0 \end{cases} &\sim \begin{cases} x = y \\ y^2 - 2y^2 + y^2 - 5y + 7y = 0 \end{cases} \sim \\ &\sim \begin{cases} x = y \\ 2y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

përfundojmë se  $(x, y) = (0, 0)$  është zgjidhja e vetme e sistemit  $(I)$ . Nga

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0 \end{cases} &\sim \\ \sim \begin{cases} x = 2y - 1 \\ (2y - 1)^2 - 2(2y - 1)y + y^2 - 5(2y - 1) + 7y = 0 \end{cases} &\sim \\ \sim \begin{cases} x = 2y - 1 \\ y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 2y - 1 \\ y_1 = 3 \vee y_2 = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 5 \vee x_2 = 3 \\ y_1 = 3 \vee y_2 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

përfundojmë se  $\{(5, 3), (3, 2)\}$  është bashkësia e zgjidhjeve të sistemit  $(II)$ . Kështu,  $\{(0, 0), (5, 3), (3, 2)\}$  është bashkësia e të gjitha zgjidhjeve të sistemeve  $(I)$  dhe  $(II)$ . Meqë sistemi i dhënë është ekuivalent me sistemet  $(I)$  dhe  $(II)$ , përfundojmë se  $\{(0, 0), (5, 3), (3, 2)\}$  është bashkësia e të gjitha zgjidhjeve të sistemit të dhënë. Duke provuar drejtpërdrejtë, shofim se secila nga këto zgjidhje është edhe zgjidhje e ekuacionit  $xy - 12x + 15y = 0$ , çka duhej vërtetuar.