EKUACIONET IRACIONALE

Përkufizimi 1: Ekuacioni i cili përmbanë ndryshore nën shenjën e rrënjës quhet ***ekuacion iracional***.

Shembuj ekuacionesh iracionale: $\sqrt{2x-3}=4$, $\sqrt[3]{7x-3}=-12$, $\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-5}$

Gjatë zgjidhjes së ekuacioneve iracionale përdorim dy metoda themelore:

1. Ngritja e të dy anëve të ekuacionit në të njëjtën fuqi, dhe
2. Marrja e ndryshoreve të reja

1. Zgjidhja e ekuacioneve iracionale duke ngritur të dy anët e ekuacionit në të njëjtën fuqi

Me rastin e kësaj metode duhet pasur parasysh se për n – tek ekuacionet $f(x)=g(x)$ dhe $(f(x))^n=(g(x))^n$ janë ekuivalente, kurse për n – çift, gjatë transformimit të ekuacionit $f(x)=g(x)$ në ekuacionin $(f(x))^n=(g(x))^n$ zgjerohet bashkësia e zgjidhjeve të ekuacionit të dhënë. Për shembull, ekuacioni $x-1=3$ ka një zgjidhje dhe ajo është $x=4$, kurse ekuacioni $(x-1)^2=3^2$ ka dy zgjidhje $x_1=4$ dhe $x_2=-2$. Pra në këtë rast zgjidhja $x_2=-2$ nuk është zgjidhje e ekuacionit $x-1=3$. Për këtë arsye, gjatë zgjidhjes së ekuacioneve iracionale, parimisht zgjidhjet e fituara duhet provuar.

Le të marrim disa shembuj dhe le t'i zgjidhim me metodën e mësipërme:

Shembulli 1: Të zgjidhet ekuacioni iracional

$$\sqrt{x-1}=x-3 \tag{1}$$

Zgjidhje: Duke i ngritur në katror të dy anët e ekuacionit merret:

$x-1=(x-3)^2$, që është ekuivalent me

$$x-1=x^2-6x+9$$

$$x^2-7x+10=0$$

Zgjidhjet e të cilit janë: $x_1=5$ dhe $x_2=2$

Duke provuar zgjidhjet drejtëpërdrejtë në ekuacionin (1) marrim:

$\sqrt{5-1}=5-3$, pra $2=2$. D.m.th. $x_1=5$ është zgjidhje e ekuacionit (1)

$\sqrt{2-1}=2-3, \sqrt{1}=-1$, gjë që nuk është e saktë, pra $x_2=2$ nuk është zgjidhje e ekuacionit (1).

Shembulli 2: Të zgjidhet ekuacioni

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6 \tag{2}$$

Zgjidhje: Duke i ngritur në katror të dy anët e ekuacionit merret:

$$x-1+2\sqrt{(x-1)(2x+6)}+2x+6=36$$

dhe më tutje:

$$2\sqrt{2x^2+4x-6}=-3x+31$$

Duke ngritur sërish në katror, kemi

$$8x^2+16x-24=9x^2-186x+961$$

$$x^2-202x+985=0$$

prej nga merret se $x_1=5; x_2=197$.

Duke provuar si në shembullin 1, merret se $x_1=5$ është zgjidhje e ekuacionit të dhënë.

Shembulli 3: Të zgjidhet ekuacioni

$$\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x-6}=2 \qquad (3)$$

Zgjidhje: Ekuacionin e dhënë e shkruajmë si vijon:

$$\sqrt[3]{2x-6}=\sqrt{x+1}-2$$

Duke i ngritur në fuqinë e tretë të dy anët e ekuacionit merret:

$$2x-6=(x+1)\sqrt{x+1}-6(x+1)+12\sqrt{x+1}-8$$

Ekuacionin e fundit mund ta shkruajmë

$(x+13)\sqrt{x+1}=8(x+1)$ ose

$$(x+13)^2(x+1)=64(x+1)^2$$

$$(x+1)((x+13)^2-64(x+1))=0$$

$(x+1)(x^2-38x+105)=0$, prej nga fitohet: $x_1=-1;\ x_2=3;\ x_3=35$.

Duke i provuar këto rezultate në ekuacionin (3), shohim se ato plotësojnë ekuacionin e dhënë, pra me fjalë tjera janë zgjidhje të ekuacionit.

Shembulli 4: Të zgjidhet ekuacioni iracional

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)} \qquad (4)$$

Zgjidhje: Duke i ngritur në fuqinë e tretë të dy anët e ekuacionit (4) merret:

$x+3\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{2x-3}+3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{(2x-3)^2}+2x-3=12(x-1)$ i cili mund të shkruhet

$$x+2x-3+3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{2x-3}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3})=12(x-1) \qquad (a)$$

Duke shfrytëzuar ekuacionin (4) shprehjen $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}$ e zëvëndësojmë me $\sqrt[3]{12(x-1)}$. Marrim:

$$3x-3+3\sqrt[3]{x(2x-3)}\cdot\sqrt[3]{12(x-1)}=12(x-1) \qquad (b)$$

$$\sqrt[3]{12x(2x-3)(x-1)}=3(x-1)$$

$$12x(2x-3)(x-1)=27(x-1)^3$$

$(x-1)(4x(2x-3)-9(x-1)^2)=0$

Zgjidhjet e ekuacionit të fundit janë: $x_1=1$ dhe $x_{2,3}=3$.

Duke i provuar në ekuacionin (4), shohim se ato e plotësojnë ekuacionin (4), d.m.th janë zgjidhje të tij.

Vërejtje: Duke zgjidhur ekuacionin (4) e përdorëm operacionin e kubimit (ngritjes në fuqinë e tretë) dhe siç e dijmë, gjatë ngritjes në fuqinë numër tek ekuacioni i fituar është ekuivalent me ekuacionin e dhënë, prandaj duket se në këtë rast nuk kemi pasur nevojë për verifikimin e zgjidhjeve. Mirëpo gjatë kalimit nga (a) në (b) shprehjen $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}$ e zëvëndësuam me $\sqrt[3]{12(x-1)}$. Është evidente se çdo rrënjë e ekuacionit (a) është njëkohësisht edhe rrënjë e ekuacionit (b), por e anasjellta nuk vlen në përgjithësi. Kështu meqë (b) është rrjedhim i (a), atëherë rrënjët duhet provuar.

Shtrohet pyetja: A mund të zgjidhim ekuacionin dhe të dijmë zgjidhjet e tij pa i provuar. Përgjigja është pozitive, por me këtë rast duhet të përdorim një metodë tjetër të cilën po e ilustrojmë me shembullin vijues:

Shembulli 5: Të zgjidhet ekuacioni

$$x-\sqrt{2x+3}=6 \qquad (5)$$

Zgjidhje: Së pari ekuacionin e dhënë e shkruajmë si vijon:

$$\sqrt{2x+3}=x-6.$$

Nga ekuacioni i fundit shohim se duhet të vlejë $2x+3\geq 0$, por edhe $x-6\geq 0$. Prej nga marrim se $x\geq 6$.

Tani ngrisim në katror të dy anët dhe kemi:

$2x+3=x^2-12x+36$ i cili është ekuivalent me $x^2-14x+33=0$, zgjidhjet e të cilit janë $x_1=3$ dhe $x_2=11$. Por nga se $x\geq 6$, zgjidhje e ekuacionit (5) është $x=11$.

2. Marrja e variablave të reja

Shembulli 6: Të zgjidhet ekuacioni:

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\frac{3}{2}(x+4) \qquad (6)$$

Zgjidhje: Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+12$$

$$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}-8=0$$

Marrim zëvëndësimin $y=\sqrt{2x^2-3x+2}$.

Atëherë kemi: $y^2-2y-8=0$, zgjidhjet e të cilit janë $y_1=4$ dhe $y_2=-2$.

Kështu ekuacioni (6) është ekuivalente me bashkësinë e dy ekuacioneve

$$\sqrt{2x^2-3x+2}=4,\ \sqrt{2x^2-3x+2}=-2$$

Nga $\sqrt{2x^2-3x+2}=4$ marrim se $x_1=\frac{7}{2}, x_2=-2$ kurse $\sqrt{2x^2-3x+2}=-2$ nuk ka zgjidhje. Pra ekuacioni (6) është ekuivalent me ekuacionin $\sqrt{2x^2-3x+2}=4$, kjo tregon se rrënjët $x_1=\frac{7}{2}, x_2=-2$ janë njëkohësisht rrënjë edhe të ekuacionit (6).

Gjatë zgjidhje së ekuacioneve iracionale shpesh preferohet që të merren dy ndryshore të reja. Këtë e ilustrojmë me shembullin vijues:

Shembulli 7: Të zgjidhet ekuacioni

$$\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2 \tag{7}$$

Zgjidhje: Le të shënojmë me $\begin{cases} u=\sqrt[4]{1-x} \\ v=\sqrt[4]{15+x} \end{cases}$ (c)

Ekuacioni (7) kalon në trajtën: $u+v=2$.

Nga (c) kemi: $\begin{cases} u^4=1-x \\ v^4=15+x \end{cases}$ (d)

Nga (d) kemi: $u^4+v^4=16$

Kështu është fituar sistemi i ekuacioneve:

$\begin{cases} u+v=2 \\ u^4+v^4=16 \end{cases}$, me zgjidhjen e të cilit marrim:

$\begin{cases} u_1=0 \\ v_1=2 \end{cases}; \begin{cases} u_2=2 \\ v_2=0 \end{cases};$

Problemi i fillimit sillet në zgjidhjen e bashkësisë së ekuacioneve:

$\begin{cases} \sqrt[4]{1-x}=0 \\ \sqrt[4]{15+x}=2 \end{cases}; \begin{cases} \sqrt[4]{1-x}=2 \\ \sqrt[4]{15+x}=0 \end{cases}$

prej nga marrim se: $x_1=1$, $x_2=-15$.

Provohet lehtë se të që të dy zgjidhjet janë zgjidhje të ekuacionit (7)

Detyrë shtëpie:

Të zgjidhen ekuacionet vijuese:

1. $\sqrt{25-x^2}=7-x$ Rez. $x=3$ dhe $x=4$

2. $1+\sqrt{x^2-9}=x$ Rez. $x=5$

3. $\sqrt{12-x\sqrt{x^2-8}}=3$ Rez. $x=3$

4. $\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$ Rez. $x=4$

5. $\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}=\sqrt{2x-8}$ Rez. $x_1=6$, $x_2=8$

6. $\sqrt{8-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=2$ Rez. $x_1=-37$ dhe $x_2=6$

7. $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}-\dfrac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}=1$ Rez. $x=1$

8. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$ Rez. $x=1$

9. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=1$ Nuk ka zgjidhje

10. A ka zgjidhje ekuacioni $\sqrt{x^2\sqrt{x^2-1}}=-x$. Arsyetoni.

11. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2}=3$ Rez. $x=\dfrac{4\sqrt{47}}{47}$

12. Të vërtetohet se $x=2$ është zgjidhje e vetme e ekuacionit:

$$\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x}$$

13. Vërtetoni se:

$$\left(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}+\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}\right)^2=4\max(a,b),\ \ a,b\geq 0$$

14. Vërtetoni se:

$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}=2$ për $(1\leq x\leq 2)$ dhe thjeshtoni $f(x)$ për $x\geq 2$.

15. Të paraqitet grafikisht funksioni

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{x^2+x-6}{|x^2+x-6|}}$$

16. Vërtetoni ose mohoni:

Ekuacioni $\sqrt[7]{x}-\sqrt[5]{x}=\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$ ka saktësisht tri zgjidhje.

17. Caktoni të gjitha zgjidhjet është e ekuacionit:

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$$

18. Gjeni të gjitha numrat $x\geq 0$ që plotësojnë ekuacionin

$$x^{x\sqrt{x}}=(x\sqrt{x})^x$$

19. Për çfarë vlera të parametrit real *a* ekuacioni:

$$x^2+2ax\sqrt{a^2-3}+4=0$$

ka zgjidhje të dyfishta? Rez. $a=\pm 2$

20. Varësisht nga parametri *a* të zgjidhet ekuacioni

$$\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x} \qquad \text{Rez. } \begin{cases} a\le 1, \text{nuk ka zgjidhje} \\ a>1, x=\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}-1} \end{cases}$$

21. Të zgjidhet ekuacioni

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

22. Për çfarë vlerash reale të *x*-it vlen:

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$

(Olimpiada e Parë Ndërkombëtare e Matematikës, Rumuni – 1959)

23. Të caktohen të gjitha zgjidhjet reale të ekuacionit

$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$ ku p – numër real.

(Olimpiada e Pestë Ndërkombëtare e Matematikës, Poloni – 1963)

Vërejtje: Detyrat nga 9 deri në 23 janë të parapara për ata nxënës të cilët dëshirojnë t'i zgjerojnë njohuritë e tyre nga teoria e numrave iracionale si dhe për ata të cilët në të ardhmen do të jenë pjesëmarrës të garave të ndryshme të matematikës qofshin ato gara komunale, regjionale, kombëtare, rajonale apo ndërkombëtare.

Literatura:

[1] – V.Litvinenko, A.Mordkovich, *Solving Problems in Algebra and Trigonometry*, Moscow, 1987

[2] – *The American Mathematical Monthly*

[3] – *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*, Number 4, 1997

[4] – *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*, Number 5, 1997

[5] – M.Berisha, R.Zejnullahu, R.Gjergji,D.Pupovci, *Përmbledhje detyrash të zgjidhura nga Matematika*, për klasën e dytë të shkollës së mesme, Prishtinë, 1999

[6] – Dr.Ejup Hamiti, *Matematika për klasën e dytë* të AMO, Prishtinë, 1979

[7] – V.T.Bogoslavov*, Zbirka resenih zadataka iz Matematike 2*, Beograd, 1994

[8] – P.M.Vasic, R.R.Janic, O.Mitrinovic,, D.Tosic, *Matematicki prirucnik za takmicenja srednjoskolaca i prijemne ispite na fakultetima*, Beograd, 1987

[9] – M.Malenica, H.D.Mulahailovic, *Zbirka zadataka iz matematike, sa rijesenjima* (sa republickih takmicenja u Bosni i Hercegovini i prijemnih ispita na Prirodno-Matematickom fakultetu u Sarajevu), Sarajevo, 1975