**OLIMPIADA MATEMATIKE E KOSOVËS**
**———OMK 2009———**

**TESTI PËR KLASËN E 12-TË**

Prishtinë, më 23 maj 2009 KODI: – – – – – – – – – – –

Udhëzim: Janë dhënë pesë detyra, secila me nga 20 pikë maksimale. Ju lutem provoni t'i zgjidhni të gjitha detyrat. Keni kohë 150 minuta. Suksese!

Ju lutem mos harroni ta shkruani kodin në këndin e djathtë, para se t'ia filloni testit.

**Detyra 1.** Të paraqitet grafikisht funksioni $y = x + |1 - x^3|$.
**Zgjidhje:**

**Detyra 2.** Le të jetë $p$ një numër i thjeshtë natyral dhe $n$ një numër i çfarëdoshëm natyral. Sa janë gjithsej numra natyralë ndërmjet 1 dhe $p^n$, që janë relativisht të thjeshtë me numrin $p^n$ (d.m.th. nuk kanë faktor të përbashkët me $p^n$, pos numrit 1).
**Zgjidhje:** Të vetmit numra natyralë ndërmjet 1 dhe $p^n$ të cilët nuk janë relativisht të thjeshtë me $p^n$ janë numrat $p, 2p, 3p, \ldots, p^{n-1} \cdot p$. Prandaj numri i kërkuar është $p^n - p^{n-1}$.

**Detyra 3.** Le të shënojmë me $a, b$ dhe $c$ gjatësitë e brinjëve të një trekëndëshi. Të vërtetohet se për to vlen jobarazimi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

**Zgjidhje:** "Secila brinjë e një trekëndëshi është me e shkurtër se shuma e dy brinjëve të tjera." Pra, $a < b + c$, e si rrjedhojë

$$\frac{a}{b+c} = \frac{2a}{(b+c)+(b+c)} < \frac{2a}{a+b+c}.$$

Ngjashëm gjemë

$$\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}$$

dhe

$$\frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}.$$

Nga tri jobarazimet e fituara marrim jobarazimin e kërkuar.

**Detyra 4.**

(a) Le të jenë dhënë 3 numra realë $a_1, a_2, a_3$. Vërtetoni se vlen jobarazimi:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \geq 0.$$

(b) Vërtetoni se jobarazimi i mësipërm nuk vlen medoemos nëse në vend të tre numrave realë marrim vetëm 4 të tillë.

**Zgjidhje:**

(a) Pa kufizuar asgjë, le të jenë $a_1 \geq a_2 \geq a_3$. Kemi $(a_1-a_2)(a_1-a_3) \geq 0$, $(a_2-a_1)(a_2-a_3) \leq 0$ dhe $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \geq 0$. Meqë vlera absolute e numrit $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)$ është jo më e vogël sesa ajo e $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)$, përfundojmse jobarazimi i dhënë është i saktë.

(Mund të vërtetohet, poashtu, se

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) =$$
$$= \frac{1}{2}\left((a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2\right) \geq 0$$

(b) Marrim $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ dhe $a_4 = -1$.

**Detyra 5.** Në një rreth i fiksojmë katër pika të ndryshme. Le të jetë vendosur në secilën pikë nga një numër real, dhe le të jenë ata numra $x_1, x_2, x_3, x_4$, të tillë që $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 0$. Në vijim e përkufizojmë një lojë me këta numra: Nëse ekziston një numër negativ, p.sh., $x_i$ atëherë lojtari e bën një hap duke e marrë atë numër, i shton $x_i$ dy numrave fqinjë, si dhe ia ndryshon shenjën numrit të zgjedhur. Loja mbaron kur të gjithë numrat janë jonegativë. Vërtetoni se kjo lojë detyrimisht mbaron (pas një numri të fundëm hapash).

**Zgjidhje:** Këtu po e shkruajmë vetëm zgjidhjen për rastin kur $x_1, x_2, x_3, x_4$ janë numra të plotë. Rasti i përgjithshëm nuk është më i vështirë.

Supozojmë, pa humbur asgjë, se numrat $x_1, x_2, x_3, x_4$ i korrespondojnë pikave të cilat janë të renditura në rreth sipas orientimit pozitiv. Shqyrtojmë funksionin e mëposhtëm:

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| +$$
$$+ |x_1 + x_2| + |x_2 + x_3| + |x_3 + x_4| + |x_4 + x_1| +$$
$$+ |x_1 + x_2 + x_3| + |x_2 + x_3 + x_4| + |x_3 + x_4 + x_1| + |x_4 + x_1 + x_2|.$$

Vërehet lehtë se ky funksion, i cili është rigorozisht pozitiv, zvogëlohet secilën herë kur lojtari luan një hap. Prandaj konkludojmë se loja mbaron pas një numër të fundëm hapash.