Armend Sh. Shabani
Propozime detyrash për Olimpiadën e Parë të Kosovës

Detyra 1. Të racionalizohet emëruesi i thyesës

$$\frac{1}{9-\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}}.$$

Zgjidhja. Zëvendësojmë $\sqrt[3]{3}=x$. Merret:

$$\frac{1}{9-\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}}=\frac{1}{3x^3-x-2x^2}=\frac{1}{x(x-1)(3x+1)}$$

$$=\frac{1}{x(x-1)(3x+1)}\cdot\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}\cdot\frac{9x^2-3x+1}{9x^2-3x+1}$$

$$=\frac{x^2(x^2+x+1)(9x^2-3x+1)}{x^3(x^3-1)(27x^3+1)}$$

$$=\frac{75+19\sqrt[3]{9}+21\sqrt[3]{3}}{492}.$$

Detyra 2. *a*) Tregoni se $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

b) Dy vrojtues gjenden në bregun e lumit (le të themi në pikat *A*, *B*). Ata janë larg njëri tjetrit për 100 *m*. Në anën tjetër të lumit gjendet vrojtuesi i tretë (le të themi në pikën *C*). Matjet tregojnë se $\measuredangle CAB=18^\circ, \measuredangle CBA=108^\circ$. Sa janë larg vrojtuesit *A*, *B* nga vrojtuesi *C*?

Zgjidhja. *a)* Duke u bazuar në formulat

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

barazinë $\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$ mund ta shprehim në trajtën

$$2\sin 18^\circ\cos 18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos 18^\circ.$$

Atëherë kemi:

$$4\sin^2 18^\circ+2\sin 18^\circ-1=0.$$

Pas zgjidhjes merret $\sin 18^\circ=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$.

Meqë $0^\circ<\sin 18^\circ<90^\circ$ kemi $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Atëherë $\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

b) Nga Teorema e Sinusit për trekëndëshin *ABC* merret:

$$\begin{cases} \dfrac{100}{\sin 54^\circ} = \dfrac{AC}{\sin 108^\circ} \\ \dfrac{100}{\sin 54^\circ} = \dfrac{BC}{\sin 18^\circ} \end{cases} \sim \begin{cases} AC = \dfrac{100 \cdot \sin 108^\circ}{\sin 54^\circ} \\ BC = \dfrac{100 \cdot \sin 18^\circ}{\sin 54^\circ} \end{cases}.$$

Nga $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ kemi $\sin 54^\circ = \sin 3 \cdot 18^\circ = 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}.$

$\sin 108^\circ = \sin(90^\circ + 18^\circ) = \cos 18^\circ.$

Prandaj $AC = \dfrac{200\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}, BC = 50(3-\sqrt{5}).$

Detyra 3. Një kuti përmban 2008 sfera të shënjuara me numrat 2, 3, ... , 2009. Nga kutia tërheqim një sferë. Le të themi se ajo e ka numrin n, $n = 2, 3, \ldots, 2009$.

Sa është probabiliteti që $\dbinom{n}{2}$ të plotpjesëtohet me 3.

Zgjidhja. Meqë $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ duhet që numri $n(n-1)$ të plotpjesëtohet me 6. D.m.th. duhet që $n(n-1)$ të jetë numër i trajtës $6k$.

Dimë se numri natyror n mund të shkruhet në njërën nga trajtat vijuese:

1) $n = 6s$; 2) $n = 6s+1$; 3) $n = 6s+2$;

4) $n = 6s+3$; 5) $n = 6s+4$; 6) $n = 6s+6$

ku s në rastin 1) është numër i plotë pozitiv, kurse në rastet tjera është numër i plotë jonegativ.

Shqyrtojmë veçmas rastet e mësipërme:

1) Nëse $n = 6s$ atëherë $n(n-1) = 6s(6s-1) = 6k$, $k = s(6s-1)$.
2) Nëse $n = 6s+1$ atëherë $n(n-1) = (6s+1)6s = 6k$, $k = s(6s+1)$.
3) Nëse $n = 6s+2$ atëherë $n(n-1) = (6s+2)(6s+1) = 2(3s+1)(6s+1)$.
4) Nëse $n = 6s+3$ atëherë $n(n-1) = (6s+3)(6s+2) = 6k$, $k = (2s+1)(3s+1)$.
5) Nëse $n = 6s+4$ atëherë $n(n-1) = (6s+4)(6s+3) = 6k$, $k = (3s+2)(2s+1)$.
6) Nëse $n = 6s+5$ atëherë $n(n-1) = (6s+5)(6s+4) = 2(3s+2)(6s+5)$.

Përfundojmë se nëse n është numër i trajtës $6s, 6s+1, 6s+3, 6s+4$ atëherë shprehja $n(n-1)$ plotpjesëtohet me 6. Numra të tillë gjithsejtë janë 1338.

Kështu nëse A është ngjarja: $\dbinom{n}{2}$ plotpjesëtohet me 3, merret:

$$p(A) = \frac{1338}{2006} = 0.66.$$

Detyra 4. Është dhënë katrori me gjatësi brinje a. Në të gjenden $4n^2+1, n\in\mathbb{N}$ pika të ndryshme. Tregoni se ekzistojnë së paku dy pika të tilla që distanca mes tyre të mos jetë më e madhe se $\frac{a}{n\sqrt{2}}$.

Zgjidhja. Katrorin e dhënë e ndajmë n^2 katror me gjatësi brinje $\frac{a}{n}$. Në bazë të Parimit të Dirileut, ekziston katrori me gjatësi brinje $\frac{a}{n}$ në të cilin gjenden së paku 5 pika të ndryshme. Pikërisht këtë katror (katrorin në të cilin gjenden 5 pika) e ndajmë në 4 katror me gjatësi brinje $\frac{a}{2n}$. Sërish, në bazë të Parimit të Dirileut, ekziston katrori me gjatësi brinje $\frac{a}{2n}$ në të cilin gjenden 2 pika të ndryshme, le të themi A, B. Distanca mes pikave A, B ($d(A,B)$) është më e vogël ose e barabartë me hipotenuzën e katrorit me gjatësi brinje $\frac{a}{2n}$. D.m.th.

$$d(A,B)\le\sqrt{\left(\frac{a}{2n}\right)^2+\left(\frac{a}{2n}\right)^2}=\frac{a}{n\sqrt{2}}$$

gjë që duhej treguar.

Detyra 5. Tregoni se nëse numri në paraqitjen e vet në sistemin dhjetor përmban vetëm shifrat 6 dhe 9, atëherë ai është kongruent me 3 sipas modulit 6.

Zgjidhja. Çdo numër natyror në sistemin dhjetor mund të paraqitet në trajtën:

$$n=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_110+a_0, \qquad (1)$$

ku $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\{0,1,\ldots,9\}$ dhe jo të gjithë janë njëkohësisht zero.

Meqë numri përmban vetëm shifrat 6 dhe 9 atëherë $a_i=6,9$ për $i=0,1,\ldots,n$.

Numrat 6 dhe 9 janë të trajtës $6k+3$.

Le të themi se $a_i=6k_i+3$. Nga (1) kemi:

$$\begin{aligned}
n&=(6k_n+3)\cdot10^n+(6k_{n-1}+3)\cdot10^{n-1}+\ldots+(6k_1+3)\cdot10+6k_0+3\\
&=6(k_n10^n+k_{n-1}10^{n-1}+\ldots+k_1\cdot10+k_0)+3\cdot10^n+3\cdot10^{n-1}+\ldots+3\cdot10+3\\
&=6A+3\cdot2\cdot(5\cdot10^{n-1}+5\cdot10^{n-2}+\ldots+5)+3\\
&=6A+6B+3\\
&=6k+3
\end{aligned}$$

ku $A=k_n10^n+k_{n-1}10^{n-1}+\ldots+k_1\cdot10+k_0$, $B=5\cdot10^{n-1}+5\cdot10^{n-2}+\ldots+5$, $k=A+B$.

Pra $n\equiv3\ (\mathrm{mod}\ 6)$, gjë që duhej treguar.