SHOQATA E MATEMATIKANËVE
TË KOSOVËS

PËRMBLEDHJE DETYRASH PËR PËRGATITJE PËR OLIMPIADA TË MATEMATIKËS

Klasa 9

Armend Sh. Shabani

Prishtinë, 2009

Bashkësitë numerike

1. Të vërtetohet se numri $2004 \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007 + 1$ është katror i një numri të plotë. Çfarë mund të konkludoni? A mund të përgjithsoni pohimin?

Pra, a vlen pohimi vijues:

Kur prodhimit të katër numrave të njëpasnjëshëm të plotë i shtojmë numrin 1 merret katrori i një numri të plotë.

2. Sa numra të plotë ka bashkësia e zgjidhjeve të mosbarazimit

$$||n|-2005| \leq 2004\,?$$

3. Të caktohet numri më i vogël natyror *n* për të cilin vlera e shprehjes

$$\frac{\sqrt{2004}+\sqrt{n}}{\sqrt{2004}-\sqrt{n}}$$

është numër natyror.

4. Numri dhjetor periodik $0.\underbrace{00...0}_{2004}200420042004...$ të shkruhet në trajtë të thyesës.

5. Le të jenë dhënë numrat $2, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^{2003}, 2^{2004}$. A mund të ndahen këta numra në dy bashkësi pa elemente të përbashkëta, ashtu që shuma e numrave në njërën bashkësi të jetë e barabartë me shumën e numrave në bashkësinë tjetër?

6. Të caktohen të gjithë numrat natyror *n* për të cilët numri $n^2 + 6n + 646$ është katror i një numri natyror.

7. Të caktohen të gjithë numrat natyror a, b, c të tillë që $\frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} = 1$.

8. Le të jetë *p* numër i thjeshtë i tillë që $2p-1$ dhe $3p-3$ të jenë katror të numrave të plotë. Të vërtetohet se $5p-1$ është katror i një numri natyror për të paktën një numër të thjeshtë *p*.

9. Të caktohen të gjithë numrat racional pozitiv a, b, c të tillë që

$$\frac{a(b+bc+1)}{b+bc+c+2} = \frac{7}{12}.$$

10. Të caktohet vlera më e vogël e herësit që merret kur numri i çfarëdoshëm treshifror pjesëtohet me shumën e shifrave të tij.

11. Të vërtetohet se shifra e fundit e numrit $2^n, n \in \mathbb{N}$ nuk mund të jetë zero.

12. Të vërtetohet se çdo numër natyror (në sistemin dhjetor) që përmban vetëm shifrat 2 dhe 6 mund të shkruhet në trajtën $4k+2$, për ndonjë k numër të plotë jonegativ. Pastaj të tregohet se numri që ka vetëm shifrat 2 dhe 6 nuk mund të shprehet si ndryshim i katrorëve të dy numrave natyror.

13. Le të jetë $\tau(n)$ numri i pjesëtuesve të numrit n (këtu përfshihen edhe 1 dhe n). Të caktohet numri më i vogël natyror n për të cilin vlen $\tau(n) = \tau(2004)$.

14. Të vërtetohet se numrin $n(n+1)(2n+1)$ plotëpjestohet me 6, për çdo $n \in \mathbb{N}$.

15. Të vërtetohet se numri i plotë i trajtës $4k+2$ nuk mund të jetë katror i një numri të plotë. Pastaj të tregohet se shuma e katrorëve të dy numrave tek nuk mund të jetë katror i një numri të plotë.

16. të vërtetohet se numri $3n+2,\ n \in \mathbb{N}$ nuk mund të jetë katror i një numri të plotë.

17. Trekëndëshi kënddrejtë, gjatësitë e brinjëve të të cilit janë numra të plotë quhet *trekëndësh i Pitagorës*. Të vërtetohet se në *trekëndëshin e Pitagorës* gjatësia e së paku njërës brinjë plotëpjestohet me 3.

18. Le të jenë a, b, c numra të plotë pozitiv tek. Të vërtetohet se vlen

$$(a,b,c) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right).$$

Elementet e gjeometrisë

1. Cili trekëndësh me brinjët *a* dhe *b* ka syprinën më të madhe?

2. Janë dhënë n – pika $(n \geq 2)$, çdo tri prej të cilave janë jokolineare. Sa drejtëza të ndryshme përcaktohen prej tyre?

3. Sa rrafshe përcaktojnë n pika $(n \geq 3)$ çdo katër prej të cilëve janë jokomplanare?

4. Të vërtetohet se:

i) Drejtëza ka pambarimisht shumë pika.

ii) Rrafshi ka pambarimisht shumë drejtëza.

5. Të vërtetohet se kusht i nevojëshm dhe i mjaftueshëm që dy vektorë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ të jenë kolinearë është që të ekzistojnë numrat realë *m*, *n*, të tillë që së paku njëri prej tyre të jetë i ndryshëm nga zero dhe të plotësohet kushti $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$.

6. Është dhënë paralelogrami *ABCD* dhe pika e çfarëdoshme *M*. Nëse *O* është pikëprerja e diagonaleve, të vërtetohet se $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$.

7. Në katrorin me brinjë 1 janë vendosur në mënyrë të çfarëdoshme 81 pika të ndryshme. Të tregohet se ekziston rrethi me rreze më të vogël se $\frac{1}{4}$ i cili përmban së paku 6 pika nga pikat e dhëna.

8. Drejtëzat *a* dhe *b* priten dhe formojnë katër kënde: dy kënde të ngushtë α dhe γ dhe dy kënde të gjerë β dhe δ. Të njehsohen këndet α, β, γ dhe δ nëse $11(\alpha + \gamma) = 7(\beta + \delta)$.

9. Le të jenë h_a, h_b, h_c gjatësitë e lartësive të trekëndëshit *ABC*, kurse *r* le të jetë gjatësia e rrezës së rrethit të brendashkruar në trekëndëshin *ABC*. Të vërtetohet se vlen $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

10. Le të jetë h_a gjatësia e lartësisë *AD* të trekëndëshit këndngusht *ABC* dhe le të jenë a, b dhe *c* gjatësitë e brinjëve *BC*, *CA* dhe *AB*. Të vërtetohet se vlen

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(b+a-c)(a+c-b)}\ .$$

11. Le të jenë r_1 dhe r_2 rrezet e rrathëve R_1, R_2 të cilët takohen nga jashtë dhe të cilët i takojnë kahët e këndit të dhënë. Le të jetë r_3 rrezja e rrethit R_3 i cili i takon krahët e këndit të dhënë. Qendra e rrethit R_3 është pikëprerja e rrathëve R_1, R_2. Të vërtetohet se $r_3 = \dfrac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

12. Të vërtetohet se në çdo trekëndësh vlen mosbarazia $\dfrac{9R}{m_a + m_b + m_c} \geq 2$, ku R është rrezja e rrethit të jashtëshkruar, kurse m_a, m_b, m_c janë segmentet e medianeve.

13. Të vërtetohet se në çfarëdo shumëkëndëshi ekzistojnë dy brinjë raporti i të cilave është më i vogël se 2.

Transformimet algjebrike

1. Kur polinomi $P(x,y)=\frac{2}{3}(x^4+2x^2(1-y)+(1-2y)+y^2)$ pjesëtohet me polinomin $Q(x,y)$ merret herësi sa gjysma e polinomit $Q(x,y)$ dhe mbetja sa një e katërta e polinomit $P(x,y)$. Të caktohet $Q(x,y)$.

2. Të caktohen kushtet që duhet të plotësojnë numrat realë x,y,z ashtu që vlera e polinomit $P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz$ të jetë pozitive.

3. Le të jenë x,y,z numra realë të tillë që $x>y>z$. Nëse $\frac{x-y+z}{x+y+z}=\frac{x-y-z}{x+y-z}$ atëherë të paktën njëri nga numrat y,z është zero.

4. Le të jenë a,b,c,d numra realë të tillë që $a+b\neq 0, b\neq 0$. Nëse vlen relacioni $(ab+2c^2)^2=c(a+b+2c)(2ab-ac-bc+2c^2)$, të vërtetohet se $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{b}$.

5. Të zbërthehet në faktor polinomi $P(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x+2$.

6. Nëse $a+\frac{1}{a}=1$ të vërtetohet se $a^5+\frac{1}{a^5}=1$.

7. Shprehja $\frac{x^2+2}{x^2+4}$ të shprehet në trajtë të shumës së dy shprehjeve racionale.

8. Të thjeshtohet shprehja $\frac{x^2-1+|x+1|}{|x|(x-2)}$.

9. Nëse a,b janë numra realë, të vërtetohet se vlen

$$a^{101}+b^{101}=(a+b)\cdot(a^{100}-a^{99}b+a^{98}b^2-...+a^2b^{98}-ab^{99}+b^{100}).$$

Pastaj të vërtetohet tregoni se shuma $1^{101}+2^{102}+...+101^{101}$ plotëpjestohet me 101.

10. Të caktohet vlera e polinomit $P(x,y,z)=x^{2004}+2004y+2004^z$ nëse dihet se vlen $x^2+y^2+z^2-2(x+4y)+17=0$.

11. Të vërtetohet se numri $A=\dfrac{1.414141...+\sqrt{21+12\sqrt{3}}+\sqrt{37-20\sqrt{3}}}{(\sqrt{22}-\sqrt{6})\sqrt{7+\sqrt{33}}}$ është numër racional. Të caktohet vlera e tij numerike.

12. Shprehja $x^{4n}+4y^{4n}$ të shprehet si prodhim i dy polinomeve. Pastaj të tregohet se numri $5^{2004}+4^{2005}$ është numër i përbërë.

13. Të tregohet se për $x=1, y=2, z=3$ polinomi

$$P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2(x+2y+3z)+14$$

merr vlerën më të vogël.

14. Të caktohen të gjitha treshet e numrave natyror (x,y,z) për të cilët vlen

$$xyz+xy+xz+yz+x+y+z+1=2004$$

ashtu që $x>y$ dhe $x>z$.

15. Të vërtetohet se shuma e të gjithë numrave natyror nga 1 deri në n nuk mund të jetë numër katërshifror me të gjitha shifrat e njëjta.

16. Nëse a,b,c janë numra realë të tillë që

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a},\ abc\neq 0,\ a\neq b\neq c\neq a$$

atëherë tregoni se $|abc|=1$.

17. Të vërtetohen identitetet:

1) $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^2=n^3,\ n\in\mathbb{N}$.

2) $1^3+2^3+...+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

18. Le të jenë a,b,c,d numra realë të tillë që $a+b+c+d=0$.

Të vërtetohet identiteti $a^3+b^3+c^3+d^3=-3(b+c)(b+d)(c+d)$.

Barazimet dhe mosbarazimet

1. Të zgjidhet barazimi $|x|+|x-1|=1$.

2. Të zgjidhet barazimi $|x^2-x+1|+|x-1|=2-x$.

3. Le të jetë x numër realë pozitivë. Të caktohet së paku një zgjidhje e barazimit $\dfrac{x}{||||x|+x-1|+x-2|+x-3|}=1$.

Të zgjidhen barazimet

4. $\sqrt{x^2+18x+81}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}=3$.

5. $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=4$.

6. $x^4+4x^3-3x^2-14x-8=0$.

7. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+3}$.

8. $x^2+\sqrt{x^2+x-5}=7-x$.

9. Të zgjidhet dhe të diskutohet barazimi

$$\frac{1}{x+m+n}+\frac{1}{x+m-n}=\frac{1}{m-n-x}+\frac{1}{m+n-x}$$

ku m,n janë numra real.

10. Të zgjidhet në bashkësinë e numrave natyror barazimi $x^2+y^2=2004$.

11. Të caktohen të gjitha dyshet (x,y), ku x,y janë numra natyror, të tillë që

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=\sqrt{800}\ .$$

12. Të zgjidhet barazimi $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}$, ku $x,y\in\mathbb{N}$.

13. Të zgjidhet barazimi $x^2-y^2=4(y+3)$, ku $x,y\in\mathbb{Z}$.

14. Të zgjidhet mosbarazimi $|x-1|<2x-4$.

15. Të zgjidhet mosbarazimi $|x+1|+|2x+1|^2+2x+1\leq|x+3|^2-4$.

16. Të vërtetohet mosbarazia $(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc$, nëse $a+b+c=1$, $a>0$, $b>0, c>0$.

17. Le të jenë a,b,c numra realë të tillë që $a\geq -\frac{1}{4}, b\geq -\frac{1}{4}, c\geq -\frac{1}{4}$ dhe $a+b+c=1$. Të vërtetohet se vlen $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leq 5$.

18. Të tregohet se se për çdo $n\in\mathbb{N}$ vlen $\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}<1$.

19. Të vërtetohet mosbarazia $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2004^2}<2$.

20. Le të jenë a,b,c numra realë pozitiv. Të vërtetohet mosbarazia

$$\frac{a}{\sqrt{(a+c)(a+b)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\leq\frac{3}{2}.$$

21. Le të jenë a,b,c gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit të dhënë. Të vërtetohet mosbarazia $\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right|<1$.

Barazimet lineare me dy ndryshore

1. Është dhënë drejtëza me barazimin $5x+12y=a$, ku $a\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Largesa normale e drejtëzës së dhënë nga origjina e sistemit koordinativ është e barabartë me b, ku $b\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Nëse syprina e sipërfaqes së trekëndëshit që formon drejtëza me boshtet koordinative është e barabartë me $\frac{13}{6}$, të vërtetohet se njëri nga numrat a,b është i thjeshtë.

2. Të tregohet se nuk ekziston drejtëza me barazimin $ax+by=12$ $(a,b\in\mathbb{N})$ me vetinë që largesa normale e saj *l* nga origjina e sistemit koordinativ të jetë 2, kurse syprina e sipërfaqes së trekëndëshit që drejtëza formon me boshtet koordinative të jetë 12.

3. Në sistemin koordinativ kënddrejtë është dhënë drejtëza me barazimin $3x+11y=109$. Sa pika në drejtëzën e dhënë i kanë koordinatat numra të plotë që i takojnë kuadrantit të parë?

4. Në sistemin koordinativ është dhënë drejtëza me barazimin $y=-\frac{1}{2}x+\frac{13}{4}$. Të tregohet se asnjë pikë e drejtëzës nuk i ka të dy koordinatat numra të plotë.

5. Janë dhënë drejtëzat me barazimet

$$d_1:\ 3y_1=(x+1)m+x$$

$$d_2:\ (m-1)y_2=x+4m-4\,.$$

Të caktohet parametri realë *m* ashtu që drejtëzat të jenë paralele.

6. Të caktohen të gjitha vlerat *n* për të cilat funksioni linear

$$(x+y)=n(x+y-4)+2(2-3x)$$

është rritës.

7. Të tregohet se për çdo numër të plotë *n* të ndryshëm nga $0,-1,-2$ funksioni linear $\frac{y}{n}-1=(n+2)x$ është rritës.

8. Drejtëza $y=mx+n$, kalon nëpër pikën $T(4,0)$ nuk kalon në kuadrantin e dytë dhe me boshtet koordinative formon trekëndësh me perimetër $12\,\mathrm{cm}$. Të caktohet barazimi i drejtëzës. (Të caktohen *m* dhe *n*).

9. Janë dhënë drejtëzat me barazimet $y=1$; $y=x+1$; $\frac{x}{9}+\frac{y}{4}=1$. Të njehsohet syprina e trekëndëshit që formojnë drejtëzat.

10. Le të jetë dhënë funksioni $f(x)=x+1$.

a) Të zgjidhet barazimi $f(x)+f(f(x^2+1))=x^2$.

b) Të caktohen koordinatat e pikës $(x, f^2(x))$.

c) Të shkruhet barazimi i drejtëzës i cili kalon nëpër pikën $(x, f^2(x))$ dhe

është paralel me drejtëzën $\frac{y-2}{x-2}=1, x\neq 2$.

11. Është dhënë funksioni $y=x+\frac{|x-1|}{x-1}$.

a) Të paraqitet grafikisht funksioni i dhënë.

b) A i takojnë pikat $A(1,0)$ dhe $B(1,2)$ grafikut të funksionit?

12. Të paraqitet grafikisht funksioni $y=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}$.

13. Të caktohen të gjitha funksionet lineare $f(x)=mx+n$ të tilla që

$$f(2x+3)+f(3x+2)=f((2x+3)+(3x+2)).$$

14. Është dhënë drejtëza me barazimin $y=(2k+5)x+k-5$. Të caktohet parametri k në mënyrë që grafiku të pret boshtin y nën origjinën e sistemit koordinativ dhe me këtë rast funksioni të jetë rritës.

Sistemet e barazimeve

Të zgjidhen sistemet e barazimeve:

1. $\begin{cases}(x+y+z)(x+y)=100\\(x+y+z)(y+z)=300\\(x+y+z)(x+z)=400\end{cases}.$

2. $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{12}{5}\\[2mm]\dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{18}{5}\\[2mm]\dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{35}{13}\end{cases}.$

3. Të caktohet $f(x)$ dhe $g(x)$ nëse

$$\begin{cases}f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+g(3x+1)=2x\\[2mm]f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)-g(2x+1)=x\end{cases}.$$

4. Të caktohet vlera e parametrave realë A,B,C,D ashtu që të vlejë barazimi

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Të zgjidhen sistemet e barazimeve:

5. $\begin{cases}x^2+4y^2=2x+4y+5\\4y^2+9z^2=4y+6z+6\\9z^2+x^2=6z+2x+7\end{cases}.$

6. $\begin{cases}(x^2-y^2)(x-y)=96\\x+y=6\end{cases}.$

7. $\begin{cases}x+|x|-|y|=2\\y-|x|+|y|=4\end{cases}.$

8. $\begin{cases}x^3-y^3-33(x-y)=0\\x^3+y^3-17(x+y)=0\end{cases}.$

9. $\begin{cases}(x+y)(x+z)=a^2\\(x+z)(z+y)=b^2\\(z+y)(y+x)=c^2\end{cases}.$

10. $\begin{cases}(y+z)^2=x^2+3\\(z+x)^2=y^2+4\\(x+y)^2=z^2+9\end{cases}.$

11. Është dhënë sistemi linear sipas x, y

$$\begin{cases} \dfrac{x}{m+n} + \dfrac{y}{m-n} = 2m \\ \dfrac{x-y}{mn} = 4 \end{cases}$$

ku m, n janë parametra realë. Të vërtetohet se sistemi ka zgjidhje pozitive, nëse $mn \neq 0$ dhe $m \neq \pm n$.

12. Të zgjidhet mosbarazimi i dyfishtë $1 < \dfrac{n-2}{n+2} < 4$.

13. Është dhënë sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} (m+2)x + my = 5 \\ 2x - 3y = m \end{cases}.$$

Të caktohet parametri realë m ashtu që zgjidhjet e sistemit të plotësojnë relacionin $x - \dfrac{3}{2}y \leq \dfrac{1}{2}m$.

14. Të zgjidhet sistemi i mosbarazimeve $\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ x + y - 4 < 0 \\ x - 2y - 3 < 0 \end{cases}$.

15. Të zgjidhet sistemi i mosbarazimeve $\begin{cases} x^2 + 5x + 6 > 0 \\ x^3 + 1 < 0 \end{cases}$.

Bashkësitë numerike

1. Numrin e dhënë e shkruajmë si vijon:

$2004 \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007 + 1$

$= (2006-2)\cdot(2006+1)\cdot(2006-1)\cdot 2006 + 1$

$= (2006^2 - 2006 - 2)\cdot(2006^2 - 2006) + 1$

$= (2006^2 - 2006)^2 - 2\cdot(2006^2 - 2006) + 1$

$= (2006^2 - 2006 - 1)^2 = (2006^2 - 2007)^2$, gjë që duhej treguar.

Le të tregojmë se kur prodhimit të katër numrave të njëpasnjëshëm të plotë u shtojmë numrin 1 merret katrori i një numri të plotë.

Le të jenë $n, n+1, n+2, n+3$ katër numra të plotë të njëpasnjëshëm.

Atëherë $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1 = (n^2+3n)\cdot(n^2+3n+2)+1$

$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2.$

Detyra për ushtrime

Vërtetoni ose mohoni pohimet vijuese:

1. Kur prodhimit të tre numrave të njëpasnjëshëm natyror i shtojmë numrin 1 merret kubi i një numri natyror.

2. Kur prodhimit të katër numrave të njëpasnjëshëm natyror tek i shtojmë numrin 1 merret katrori i një numri natyror.

3. Kur prodhimit të katër numrave të njëpasnjëshëm natyror çift i shtojmë numrin 1 merret katrori i një numri natyror.

2. Në bazë të vetisë së vlerës absolute kemi

$$-2004 \le |n| - 2005 \le 2007$$

D.m.th. $1 \le |n| \le 4012$.

Zgjidhim rastin $|n| \ge 1$. Në këtë rast kemi $n \le -1$ dhe $n \ge 1$. Pse?

Në anën tjetër $|n| \le 4012 \Rightarrow -4012 \le n \le 4012$.

D.m.th. zgjidhje janë ato vlera n për të cilat vlen

$-4012 \le n \le -1$ dhe $1 \le n \le 4012$ (1).

Pra, gjithsejtë janë $2 \cdot 4012 = 8024$ numra të plotë n që e plotësojnë mosbarazimin e dhënë dhe ata jipen me (1).

3. Shprehjen e dhënë e shkruajmë në trajtën

$$\frac{\sqrt{2004}+\sqrt{n}}{\sqrt{2004}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\frac{2004}{n}}+1}{\sqrt{\frac{2004}{n}}-1} = \frac{k+1}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1},$$

ku me k kemi zëvendësuar shprehjen $\sqrt{\frac{2004}{n}}$.

Meqë numri i dhënë duhet të jetë natyror mbetet që $k-1 \in \{1,2\}$, d.m.th. $k \in \{2,3\}$.

Për $k = 2$, kemi

$$\frac{\sqrt{\frac{2004}{n}}+1}{\sqrt{\frac{2004}{n}}-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2004}{n}} + 1 = 3\left(\sqrt{\frac{2004}{n}} - 1\right) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2004}{n}} = 2.$$

Nga relacioni i fundit merret $n = 501$.

Nxënësi, ngjashëm si më sipër le të tregojë se për $k = 3$ merret që n nuk është numër natyror.

Përfundojmë se $n = 501$ është numri më i vogël natyror për të cilin $\frac{\sqrt{2004}+\sqrt{n}}{\sqrt{2004}-\sqrt{n}}$ është numër natyror.

Detyrë për ushtrime

4. A ekziston numri natyror n për të cilin shprehja $\frac{\sqrt[3]{2004}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{2004}-\sqrt[3]{n}}$ është numër natyror?

4. Le të shënojmë me x numrin e dhënë. Pra $x = 0.\underbrace{00...0}_{2004}200420042004...$.

Relacionin e fundit e shumëzojmë me 10^{2004} dhe 10^{2008} dhe marrim:

$10^{2004}x = 0.20042004...$ (1)

$10^{2008}x = 2004.20042004...$ (2)

Duke zbritur anë për anë barazimin (1) nga barazimi (2) merret

$$10^{2008}x - 10^{2004}x = 2004 .$$

D.m.t.h. $x = \dfrac{2004}{10^{2004}(10^4 - 1)} = \dfrac{2004}{9999 \cdot 10^{2004}}$.

5. Supozojmë se një ndarje e tillë e numrave të dhënë është e mundur.

Le të shënojmë me S shumën e elementeve në cilëndo bashkësi (S do të jetë edhe shuma e elementeve të bashkësisë tjetër).

Qartë se S është numër çift sepse fitohet si shumë e numrave çift (secili nga numrat $2^n, n \in 1, 2, ..., 2004$ është çift).

Në anën tjetër $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2004}$. D.m.th. $S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2003}$.

Pra S na paraqitet të jetë numër tek. Pse? Por, më sipër pamë se S është numër çift. Pra, kemi arritur në kontradiksion. D.m.th. supozimi ynë qenka i gabuar. Me fjalë të tjera, numrat e dhënë nuk mund të ndahen në dy bashkësi me vetinë që të kenë shumën e njëjtë.

Detyrë për ushtrime

5. A është e mundur që numrat $3, 3^2, 3^3, ..., 3^{2004}$ të ndahen në dy bashkësi pa elemente të përbashkëta në mënyrë që prodhimi i numrave në njërën bashkësi të jetë i barabartë me prodhimin e numrave në bashkësinë tjetër.

6. Le të $n^2 + 6n + 646 = m^2$. Atëherë $n^2 + 6n + 9 + 637 = m^2$. D.m.th. $m^2 - (n+3)^2 = 637$, përkatësisht $(m - n - 3) \cdot (m + n + 3) = 91 \cdot 7$.

Merret sistemi $\begin{cases} m - n - 3 = 7 \\ m + n + 3 = 91 \end{cases}$. Pse?

Duke mbledhur anë për anë të dy barazimet e sistemit të mësipërm merret $m = 49$. Pra $(n+3)^2 = 49^2 - 637 \Rightarrow n = 39$.

Përfundojmë se $n = 39$ është numri i vetëm natyror për të cilin shprehja $n^2 + 6n + 646$ është katror i një numri natyror.

7. Së pari vërejmë se të tre të mbledhëshmit $\frac{1}{a}, \frac{1}{ab}, \frac{1}{abc}$ nuk mund të jenë njëkohësishtë më të vegjël se $\frac{1}{3}$. Pse? Pra së paku njëri prej tyre duhet të jetë më i madh ose baraz me $\frac{1}{3}$.

Do të shqyrtojmë tri raste:

1) $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{abc} \geq \frac{1}{3}$.

Rasti 1). Nëse $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{3}$ atëherë $a \leq 3$. D.m.th. $a \in \{1, 2, 3\}$.

Për $a = 1$ kemi $1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} = 1$ d.m.th. $\frac{1}{b} + \frac{1}{bc} = 0$ pra në këtë rast detyra nuk ka zgjidhje. Pse?

Për $a = 2$ kemi $\frac{1}{2} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2bc} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} = 1$.

Duke transformuar shprehjen e fundit merret $1 = c \cdot (b - 1)$ prej nga kemi $c = 1, b - 1 = 1$. Pra $a = 2, b = 2, c = 1$ është një zgjidhje e detyrës.

Për $a = 3$ kemi $\frac{1}{3} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3bc} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{bc} = 2$.

Pas transformimit të shprehjes së fundit kemi $c \cdot (2b - 1) = 1$, d.m.th. $c = 1, 2b - 1 = 1$. Pra $a = 3, b = 1, c = 1$ është një zgjidhje tjetër e detyrës.

Rasti 2). Nëse $\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{3}$ atëherë $ab \leq 3$. Këtu na paraqiten këto nënraste:

i) $a = 1, b = 1$ ii) $a = 1, b = 2$ iii) $a = 2, b = 1$
iv) $a = 1, b = 3$ v) $a = 3, b = 1$.

Nxënësi lehtë mund të tregojë se në asnjërin nga nënrastet i) – iv) detyra nuk ka zgjidhje. Në nënrastin v) merret zgjidhja $a = 3, b = 1, c = 1$ që u paraqit gjatë shqyrimit të rastit 1).

Rasti 3). Nëse $\frac{1}{abc} \geq \frac{1}{3}$ atëherë $abc \leq 3$. Duhet shqyrtuar nënrastet vijuese:

i) $a = 1, b = 1, c = 1$ ii) $a = 1, b = 1, c = 2$

iii) $a = 1, b = 1, c = 3$ iv) $a = 1, b = 2, c = 1$

iv) $a = 1, b = 3, c = 1$ vi) $a = 2, b = 1, c = 1$

vii) $a = 3, b = 1, c = 1$.

Nxënësi lehtë mund të tregojë se në nënrastet i) – vi) detyra nuk ka zgjidhje kurse në nënrastin vii) ka zgjidhje e cila u paraqit në rastin 1).

Detyra për ushtrime

6. Të caktohen të gjithë numrat natyror a, b, c, d të tillë që

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{abcd} = 1.$$

7. Të caktohen të gjithë numrat natyror a, b, c, d të tillë që

$$\frac{1}{abc} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{bcd} = 1.$$

8. Le të jetë $2p - 1 = k^2$ dhe $3p - 3 = m^2$. Atëherë duke i mbledhur anë për anë dy shprehjet e fundit merret

$$5p - 1 = k^2 + m^2 + 3 \qquad (1)$$

Poashtu $5p - 1 = 4(2p - 1) - (3p - 3)$, pra

$$5p - 1 = 4k^2 - m^2 \qquad (2)$$

Nga (1) dhe (2) merret $k^2 + m^2 + 3 = 4k^2 - m^2$, përkatësisht $3(k^2 - 1) = 2m^2 \Leftrightarrow 3(k - 1) \cdot (k + 1) = 2m^2$.

Dallojmë rastet:

1) $\begin{cases} 3(k-1) = 2 \\ k + 1 = m^2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3(k-1) = m^2 \\ k + 1 = 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3(k-1) = 2m \\ k + 1 = m \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3(k-1) = m \\ k + 1 = 2m \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3(k+1) = 2 \\ k - 1 = m^2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3(k+1) = m^2 \\ k - 1 = 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3(k+1)=2m \\ k-1=m \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3(k+1)=m \\ k-1=2m \end{cases}$.

Përveç rastit të tretë, me zgjidhjen e të cilit merret $k=5, m=6$ rastet tjera nuk kanë zgjidhje.Tregoni.

Për $k=5$ ose $m=6$ merret $p=13$. Pra, përfundojmë se për $p=13$, $5p-1$ është katror i një numri natyror (numrit 8).

9. Së pari vërejmë se ana e majtë mund të shkruhet si vijon

$$\frac{a(b+bc+1)}{b+bc+c+2}=\frac{a}{\frac{b+bc+1+c+1}{b+bc+1}}=\frac{a}{1+\frac{c+1}{b+bc+1}}=$$

$$=\frac{a}{1+\frac{1}{\frac{b(1+c)+1}{c+1}}}=\frac{a}{1+\frac{1}{b+\frac{1}{c+1}}}. \qquad (1)$$

Kurse ana e djathtë mund të shkruhet në formën:

$$\frac{7}{12}=\frac{1}{\frac{12}{7}}=\frac{1}{1+\frac{5}{7}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{5}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{5}{2}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{2}}}} \qquad (2)$$

Nga (1) dhe (2) merret

$$\frac{a}{1+\frac{1}{b+\frac{1}{c+1}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{2}}}}.$$

Kjo është e mundur vetëm nëse $a=1, b=1, c=\frac{3}{2}$.

10. Është e qartë se çdo numër treshifror *n*, mund të shprehet si vijon

$$n=10^2a+10b+c,$$

ku a,b,c janë shifra e qindësheve, dhjetësheve dhe njësheve, përkatësisht.

Atëherë duhet caktuar vlerën më të vogël të numrit (herësit)

$$H=\frac{100a+10b+c}{a+b+c}.$$

Numrin e dhënë e shkruajmë në trajtën $H=1+\frac{99a+9b}{a+b+c}$.

Shprehja e dhënë e ka vlerën më të vogël kur c merr vlerën më të madhe. Pse? D.m.th. $c=9$.

Pra kemi $H=1+9\frac{11a+b}{a+b+9}=1+9\left(1+\frac{10a-9}{a+b+9}\right)=10+9\frac{10a-9}{a+b+9}$.

Ngjashëm si më parë konkludojmë se shprehja e dhënë ka vlerën më të vogël kur b merr vlerën më të madhe. Pra $b=9$.

Kemi $H=10+9\frac{10a-9}{a+18}$.

Tani, në këtë rast shprehja ka vlerën më të vogël kur a merr vlerën më të vogël. Pse? D.m.th. $a=1$.

Pra $H=10+9\frac{10-9}{19}=10+\frac{9}{19}=\frac{199}{9}$.

Përfundojmë se vlera më e vogël merret për $a=1, b=9, c=9$.

Detyra për ushtrime

8. Të caktohet vlera më e madhe e herësit që merret kur numri çfarëdoshëm katërshifror pjesëtohet me shumën e shifrave të tij.

9. Të caktohet vlera më e madhe e herësit që merret që merret kur numri i çfarëdoshëm treshifror pjesëtohet me prodhimin e shifrave të tij.

10. Të caktohet vlera më e vogël e herësit që merret kur numri i çfarëdoshëm treshifror pjesëtohet me prodhimin e shifrave të tij.

11. Supozojmë se për ndonjë $n\in\mathbb{N}$, shifra e fundit e numrit 2^n është zero. Atëherë numri 2^n plotëpjestohet me 10, d.m.th. ekziston numri i plotë pozitiv k i tillë që $2^n=10\cdot k$.

Pra $2^n=2\cdot 5\cdot k$, prej nga rrjedh që $2^{n-1}=5\cdot k$.

Vërejmë se k duhet të jetë numër çift. Pse? Le të jetë $k=2\cdot k_1$.

Atëherë $2^{n-1}=5\cdot 2\cdot k_1$, d.m.th. $2^{n-2}=5\cdot k_1$. Ngjashëm si më sipër konkludojmë se k_1 duhet të jetë numër çift dhe me këtë rast merret $2^{n-3}=5\cdot k_2$.

Duke vazhduar këtë proces merret $2^{n-n}=2^0=1=5\cdot k_{n-1}$, ku k_{n-1} është numër i plotë pozitiv, gjë që nuk është e mundur. Pse? Përfundojmë se shifra e fundit e numrit 2^n për asnjë $n\in\mathbb{N}$ nuk mund të jetë 0.

Detyrë për ushtrime

11. Le të jetë $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Psh. $5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$. Tregoni se për asnjë $m\in\mathbb{N}$ dhe asnjë $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 5$ barazimi $2^m=n!$ nuk ka zgjidhje.

12. Së pari përkujtojmë se numri i çfarëdoshëm natyror n_1 në sistemin dhjetor shprehet si vijon

$$n_1=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+...+a_1\cdot 10+a_0 \qquad (1)$$

ku $a_{0,}a_1,...$ janë shifra e njësheve, dhjetësheve, qindësheve etj.

Pra $a_0,a_1,...,a_n\in\{0,1,2,...,n\}$.

P.sh. $927=9\cdot 10^2+2\cdot 10^1+7$, $2004=2\cdot 10^3+0\cdot 10^2+0\cdot 10^1+4$ etj.

Tani numri natyror që përbëhet vetëm nga shifrat 2 dhe 6 shkruhet në formën (1) por në këtë rast $a_0,a_1,...,a_n\in\{2,6\}$.

P.sh. $266626=2\cdot 10^5+6\cdot 10^4+6\cdot 10^3+6\cdot 10^2+2\cdot 10+6$ apo $6262=6\cdot 10^3+2\cdot 10^2+6\cdot 10+2$.

Poashtu vërejmë se numrat 6 dhe 2 janë të trajtës $4k+2$, ku k është numër i plotë jonegativ. Pse?

Pra të gjithë numrat a_k, $k\in\{0,1,...,n\}$ janë të trajtës $4k+2$.

Atëherë numrin n_1 e shkruajmë si vijon:

$$\begin{aligned}
n_1&=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+...+a_1\cdot 10+a_0\\
&=(4k_n+2)\cdot 10^n+(4k_{n-1}+2)\cdot 10^{n-1}+...+(4k_1+2)\cdot 10+(4k_0+2)\\
&=4(k_n\cdot 10^n+k_{n-1}\cdot 10^{n-1}+...+k_1\cdot 10+k_0)+2\cdot 10^n+2\cdot 10^{n-1}+...+2\cdot 10+2\\
&=4(k_n\cdot 10^n+k_{n-1}\cdot 10^{n-1}+...+k_1\cdot 10+k_0)+2\cdot 2\left(\frac{10^n}{2}+\frac{10^{n-1}}{2}+...+\frac{10}{2}\right)+2
\end{aligned}$$

$$= 4(k_n \cdot 10^n + k_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + k_1 \cdot 10 + k_0) + 4\left(2^{n-1}5^n + 2^{n-2}5^{n-1} + ... + 5\right) + 2$$

$= 4(A + B) + 2 = 4k + 2$, ku $k = A + B$ kurse

$A = k_n \cdot 10^n + k_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + k_1 \cdot 10 + k_0$, $B = 2^{n-1}5^n + 2^{n-2}5^{n-1} + ... + 5$.

Pra, treguam se numri natyror që përmban vetëm shifrat 2 dhe 6 mund të shkruhet në trajtën $4k + 2$.

Le të tregojmë tani se numri që ka vetëm shifrat 2 dhe 6 nuk mund të shprehet si ndryshim i katrorëve të dy numrave natyror.

Supozojmë të kundërtën, pra se ekzistojnë numrat natyror m, n të tillë që $m^2 - n^2 = 4k_2$.

Atëherë $(m - n) \cdot (m + n) = 2 \cdot (2k + 1)$.

D.m.th. njëri nga numrat $m - n$ dhe $m + n$ është çift, kurse tjetri është tek. Por kjo nuk është e mundur sepse numrat $m - n, m + n$ janë njëkohësisht ose çift ose tek. Pse?

Pra, supozimi ynë na solli në kundërshtim. Me këtë kemi përfunduar vërtetimin.

Detyrë për ushtrime

12. Vërtetoni ose mohoni:

Asnjë numër natyror që përmban shifra tek nuk mund të shprehet si ndryshim i katrorëve të dy numrave të njëpasnjëshëm natyror.

13. Së pari do të paraqesim disa sqarime. Le të shqyrtojmë për shembull numrin 24. Provohet lehtë se pjesëtuesit e numrit 24 janë: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Pra $\tau(24) = 8$. Nëse shqyrtojmë numrin 30, atëherë pjesëtuesit e numrit 30 janë 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Pra $\tau(30) = 8$.

Pra, vërejmë se $\tau(24) = \tau(30) = 8$, por 24 është më i vogël se 30. D.m.th. 24 është numri më i vogël natyror n i tillë që $\tau(n) = 8$.

Por për të përcaktuar numrin e pjesëtuesve të “*numrave të mëdhenjë*” nuk është detyrë e lehtë.

Në vijim do të shohim një metodë për të përcaktuar numrin e pjesëtuesve të numrit të dhënë.

Përkujtojmë se çdo numër natyror n, mund të shkruhet në mënyrë të vetme në formën $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_s^{k_s}$, ku $p_1, p_2, ..., p_s$ janë numra të thjeshtë të ndryshëm mes veti, kurse $k_1, k_2, ..., k_s$ janë numra natyror.

P.sh. $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Kështu nëse p është numër i thjeshtë atëherë pjesëtuesit e numrit $p^k, k \in \mathbb{N}$ janë: $1, p, p^2, ..., p^{k-1}, p^k$, pra gjithsejtë janë $k+1$ pjesëtues të numrit p^k. D.m.th. $\tau(p^k) = k+1$.

Atëherë meqë $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_s^{k_s}$ do të kemi

$$\tau(n) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot ... \cdot (k_s + 1).$$

Tani meqë $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$ kemi

$$\tau(2004) = (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12.$$

D.m.th. numri 2004 ka gjithsejtë 12 pjesëtues. Detyra e jonë është që të caktojmë numrin më të vogël natyror që ka 12 pjesëtues, pra që $\tau(n) = 12$.

Meqë $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 3 \cdot 2$ atëherë numrat që kanë 12 pjesëtues janë të trajtave vijuese:

$p^{11}, pq^5, p^2q^3, p^3q^2, p^5q, pqr^2, p^2qr, pq^2r$. Pse?

Numrat më të vegjël të këtyre trajtave janë:

$2^{11}, 2 \cdot 3^5, 2^2 \cdot 3^3, 2^3 \cdot 3^2, 2^5 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, përkatësisht

$2048, 486, 108, 72, 96, 150, 60, 90$.

Përfundojmë se numri më i vogël natyror me 12 pjesëtues qenka numri 60.

14. Numri $n \in \mathbb{N}$ mund të shkruhet në njërën nga trajtat:

1) $n = 6k$ 2) $n = 6k+1$ 3) $n = 6k+2$

4) $n = 6k+3$ 5) $n = 6k+4$ 6) $n = 6k+5$.

Shqyrtojmë veçmas rastet 1) – 6).

1) Nëse $n = 6k$ atëherë është e qartë se $n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ plotëpjestohet me 6. Pse?

2) Nëse $n = 6k+1$ atëherë $n+1 = 6k+1+1 = 6k+2 = 2(3k+1)$, kurse $2n+1 = 2(6k+1)+1 = 12k+3 = 3(4k+1)$. Pra $n+1 = 2(3k+1)$

plotëpjestohet me 2 dhe $2n+1=3(4k+1)$ plotëpjestohet me 3. D.m.th. $n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$ plotëpjestohet me 6.

3) Nëse $n=6k+2=2(3k+1)$ atëherë $n+1=6k+3=3(2k+1)$. Pra $n=2(3k+1)$ plotëpjestohet me 2 dhe $n+1=3(2k+1)$ plotëpjestohet me 3. D.m.th. $n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$ plotëpjestohet me 6.

4) Nëse $n=6k+3=3(2k+1)$. Atëherë $n+1=6k+4=2(3k+2)$. Pra $n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$ plotëpjestohet me 6.

5) Nëse $n=6k+4=2(3k+2)$. Atëherë $2n+1=2(6k+4)+1=3(4k+3)$. Pra $n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$ plotëpjestohet me 6.

6) Për $n=6k+5,\ n+1=6(k+1)$. Pra $n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$ plotëpjestohet me 6.

Detyrë për ushtrime

13. Vërtetoni ose mohoni:

Për asnjë $n\in\mathbb{N}$ numri n^2+1 nuk plotëpjestohet me 3.

15. Tregojmë së pari pjesën e parë të detyrës të cilën do ta zgjidhim me dy mënyra.

Mënyra e parë. Është e qartë se numri $4k+2$ nuk mund të jetë katror i një numri të plotë tek sepse $4k+2$ është numër çift kurse katrori i një numri të plotë tek është numër tek.

Le të tregojmë se $4k+2$ nuk mund të jetë as katror i një numri të plotë çift.

Supozojmë të kundërtën, pra se $4k+2=(2s)^2,\ s\in\mathbb{Z}$.

Atëherë $4k+2=4s^2\Rightarrow 2=4(s^2-k)\Rightarrow\dfrac{1}{2}=s^2-k$, gjë që nuk është e mundur sepse në anën e majtë kemi numër të rregulltë racional e në anën e djathtë kemi numër të plotë.

Pra, supozimi ynë qenka i gabuar. Përfundojmë se $4k+2$ nuk mund të jetë katror i një numri të plotë çift.

Mënyra e dytë. Për n – çift, pra nëse $n=2k$ atëherë $n^2=4k^2$.

Nëse n – tek, pra nëse $n=2k+1$ atëherë $n^2=4k(k+1)+1$.

Pra, kur katrori i një numri n pjesëtohet me 4 jep mbetjen 0 (nëse n – çift) dhe 1 (nëse n – tek) (e asesi 2 si në rastin $4k+2$), pra $4k+2$ nuk mund të jetë katror i një numri të plotë.

Vërtetojmë tani pjesën tjetër të detyrës.

Le të jenë $m_1 = 2s_1 + 1, m_2 = 2s_2 + 1, s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ dy numra tek.

Atëherë $m_1^2 + m_2^2 = (2s_1+1)^2 + (2s_2+1)^2 = 4(s_1^2 + s_2^2 + s_1 + s_2) + 2 = 4k + 2$, ku $k = s_1^2 + s_2^2 + s_1 + s_2$.

Në pjesën e parë të detyrës pamë se $4k+2$ nuk mund të jetë katror i një numri të plotë e me këtë as $m_1^2 + m_2^2$ nuk mund të jetë katror i një numri të plotë, gjë që kompleton vërtetimin.

16. *Shënim*. Duhet të tregojmë se nuk ekziston numri i plotë pozitiv m i tillë që $m^2 = 3n+2$. D.m.th. duhet të tregojmë se kur katrori i numrit natyror m (pra kur m^2) pjesëtohet me 3 asnjëherë nuk e jep mbetjen 2.

Rikujtojmë faktin se çdo numër natyror n mund të shprehet në një nga format: $3k, 3k+1, 3k+2, k \in \mathbb{N}$.

1) Nëse $m = 3k$ atëherë $m^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$.

2) Nëse $m = 3k+1$ atëherë $m^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$.

3) Nëse $m = 3k+2$ atëherë $m^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$.

Pra, vërejmë se katrori i numrit natyror gjatë pjesëtimit me 3 jep mbetjen 0 (rasti 1) ose 1 (rastet 2, 3) e asnjëherë 2, gjë që kompleton vërtetimin.

17. Supozojmë se asnjëra nga katetet a, b nuk plotëpjestohet me 3.

Atëherë a, b janë të njërës nga format $3k+1, 3k+2$.

Dallojmë rastet:

1) $a = 3k+1, b = 3k_1 + 1$

2) $a = 3k+1, b = 3k_1 + 2$ $(a = 3k+2, b = 3k_1 + 1)$

3) $a = 3k+2, b = 3k_1 + 2$.

Shqyrtojmë ndaras rastet e mësipërme.

1) $a^2 + b^2 = (3k+1)^2 + (3k_1+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 + 9k_1^2 + 6k_1 + 1$

$$= 3(3k^2 + 2k + 3k_1{}^2 + 2k_1) + 2 = 3n + 2$$

ku $n = 3k^2 + 2k + 3k_1{}^2 + 2k_1$.

2) $a^2 + b^2 = (3k+1)^2 + (3k_1 + 2)^2 = 9k^2 + 6k + 1 + 9k_1{}^2 + 12k_1 + 4$

$$= 3(3k^2 + 2k + 3k_1{}^2 + 4k_1 + 1) + 2 = 3n + 2$$

ku $n = 3k^2 + 2k + 3k_1{}^2 + 4k_1 + 1$.

3) $a^2 + b^2 = (3k+2)^2 + (3k_1 + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 + 9k_1{}^2 + 12k_1 + 4$

$$= 3(3k^2 + 4k + 3k_1{}^2 + 4k_1 + 2) + 2$$

$$= 3n + 2 .$$

ku $n = 3k^2 + 4k + 3k_1{}^2 + 4k_1 + 2$.

Por dijmë se $c^2 = a^2 + b^2$. D.m.th. në të tri rastet morëm që $c^2 = 3n + 2$. Në detyrën 16 treguam se katrori i asnjë numri natyror nuk mund të jetë i trajtës $3n + 2$.

Pra së paku njëri nga numrat a, b duhet të plotëpjestohet me 3.

18. Përkujtojmë se me (a,b) kemi shënuar pjesëtuesin më të madh të përbashkët të numrave a, b. Përkujtojmë përkufizimet vijuese:

Përkufizimi 1: Themi se $(a,b) = d$ nëse plotësohen kushtet vijuese:

1) $d \mid a$ dhe $d \mid b$.

2) Nëse $k \mid a$ dhe $k \mid b$ atëherë $k \mid d$.

Me (a,b,c) paraqesim pjesëtuesin më të madh të përbashkët të numrave a, b, c. Përkufizimi i pjesëtuesit më të madh të përbashkët për tre numra "*zgjerohet*" në bazë të përkufizimit për dy numra. Për këtë marrim përkufizimin vijues:

Përkufizimi 2: Themi se $(a,b,c) = d$ nëse plotësohen kushtet vijuese:

1) $d \mid a$, $d \mid b$, $d \mid c$

2) Nëse $k \mid a, k \mid b, k \mid c$ atëherë $k \mid d$.

Le t'i kthehemi zgjidhjes së detyrës.

Le të jenë $a = 2k + 1$, $b = 2l + 1$, $c = 2n + 1$.

Le të shënojmë $d=(a,b,c)=(2k+1,2l+1,2n+1)$.

Tani $\frac{a+b}{2}=\frac{2k+2l+2}{2}=k+l+1$, $\frac{a+c}{2}=k+n+1$, $\frac{b+c}{2}=l+n+1$.

Le të shënojmë $d_1=\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)=(k+l+1,k+n+1,l+n+1)$.

Duhet treguar se $d=d_1$.

Nga relacioni $d=(2k+1,2l+1,2n+1)$ merret:

$d\mid(2k+1), d\mid(2l+1), d\mid(2n+1)$.

D.m.th. ekzistojnë numrat e plotë x,y,z të tillë që

$dx=2k+1,\ dy=2l+1,\ dz=2n+1$.

Pra $d(x+y+z)=2k+2l+2n+3$ (1)

Nga relacioni $d_1=(k+l+1,k+n+1,l+n+1)$ merret:

$d_1\mid(k+l+1), d_1\mid(k+n+1), d_1\mid(l+n+1)$.

Pra ekzistojnë numrat e plotë x_1,y_1,z_1 të tillë që

$d_1x_1=k+l+1,\ d_1y_1=k+n+1,\ d_1z_1=l+n+1$

Pra $d_1(x_1+y_1+z_1)=2k+2l+2n+3$ (2)

Nga (1) dhe (2) merret

$$d(x+y+z)=d_1(x_1+y_1+z_1).$$

Meqë, $d,d_1,x+y+z,x_1+y_1+z_1$ janë numra të plotë mbetet që:

1) $d=d_1, x+y+z=x_1+y_1+z_1$ ose

2) $d=x_1+y_1+z_1,\ d_1=x+y+z$.

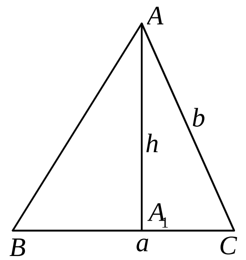
Është e qartë se nga të dy rastet rrjedhë që $d=d_1$, gjë që duhej treguar.

Elementet e gjeometrisë

1. Le të jetë dhënë trekëndëshi ABC ashtu që $BC = a,\ AC = b$ (shih figurën).

Le të jetë $AA_1 = h$ (pra $AA_1 \perp BC$).

Atëherë $S_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h}{2}$.

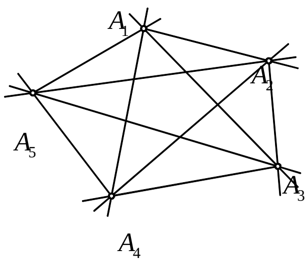


Sipas supozimit madhësia *a* dihet, pra syprina e trekëndëshit ABC ndryshon me ndryshimin e lartësisë *h*.

Tani është e qartë se trekëndëshi ka syprinën më të madhe kur *h* të arrij vlerën më të madhe. Nga trekëndëshi AA_1C kemi $h < b$ (sepse *h* është katetë kurse *b* është hipotenuzë). Pra *h* arrin vlerën më të madhe kur $h = b$. Në këtë rast A_1 përputhet me pikën C kështu që trekëndëshi ABC shndërrohet në trekëndësh kënddrejtë me katete $BC = a$ dhe $AC = b$.

Përfundojmë se nga të gjithë trekëndëshat me brinjë *a*, *b* syprinën më të madhe e ka trekëndëshi kënddrejtë me katete *a*, *b*.

2. Le të marrim në fillim një shembull më të thjeshtë. Le të supozojmë se kemi 5 pika, çdo tri prej të cilave janë jokolineare. Duhet të caktojmë sa drejtëza të ndryshme përcaktohen prej tyre.



Le të jenë A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 pikat me vetinë e përshkruar më sipër (shih figurën).

Pika A_1 me pikat tjera formon 4 drejtëza $(d(A_1A_2), d(A_1A_3), d(A_1A_4),\ d(A_1A_5))$.

Ngjashëm pika A_2 me pikat tjera formon 4 drejtëza $(d(A_2A_1), d(A_2A_3)$, $d(A_2A_4),\ d(A_2A_5))$.

Ngjashëm merret edhe për pikat A_3, A_4, A_5 .

Pra, pesë pika përcaktojnë 20 drejtëza, por meqë secila prej drejtëzave është numëruar dy herë përfundojmë se 5 pika (çdo tri prej të cilave janë jokolineare) përcaktojnë 10 drejtëza të ndryshme.

Le të përgjithsojmë detyrën për *n* – pika.

Është e qartë se secila prej *n* – pikave të dhëna me pikat e tjera përcakton $n-1$ drejtëza dhe të gjitha së bashku (pra *n* – pika) përcaktojnë $n(n-1)$ drejtëza. Meqenëse secila prej drejtëzave është numëruar dy herë përfundojmë se numri i përgjithshëm i drejtëzave të përcaktuara nga *n* – pika (çdo tri prej të cilave janë jokolineare) është $\frac{n(n-1)}{2}$.

Detyra për ushtrime

1. Sa pika të ndryshme $n\ (n \geq 2)$ ekzistojnë, nëse çdo tri prej tyre janë jokolineare dhe numri i drejtëzave që ato përcaktojnë është 10 herë më i madh se numri i pikave?

2. Janë dhënë $n\ (n \geq 2)$ pika të ndryshme, çdo tri prej të cilave janë jokolineare. Ato përcaktojnë 3*k* drejtëza të ndryshme, kurse *k* pika të ndryshme, çdo tri prej të cilave janë jokolineare përcaktojnë 5*n* drejtëza të ndryshme. A ekzistojnë numrat e tillë *k*, dhe *n*? Nëse po të caktohen.

3. Bashkësia e *n* pikave (*n* – numri çift) ka 7 treshe pikash kolineare. Sa drejtëza përcaktohen prej pikave të kësaj bashkësie.

3. Ngjashëm si në detyrën e dytë do të marrim një shembull më të thjeshtë. Le të supozojmë se kemi 5 pika (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) çdo katër prej të cilave janë jokomplanare.

Le të fillojmë me pikën A_1. Atëherë secila nga 4 pikat tjera me pikën A_1 dhe me tri pikat e tjera përcakton tri rrafshe (p.sh. pika A_2 me pikën A_1 dhe me njërën nga pikat A_3, A_4, A_5 përcakton rrafshet $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_2A_5$).

Në këtë mënyrë do të marrim $4 \cdot 3 = 12$ rrafshe:

$$A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_2A_5$$
$$A_1A_3A_2, A_1A_3A_4, A_1A_3A_5$$
$$A_1A_4A_2, A_1A_4A_3, A_1A_4A_5$$
$$A_1A_5A_2, A_1A_5A_3, A_1A_5A_4.$$

Meqë secili nga 12 rrafshet paraqitet dy herë kemi $12:6=6$ rrafshe:

$$A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_1A_2A_5\ A_1A_3A_4, A_1A_3A_5, A_1A_4A_5.$$

Ngjashëm veprohet edhe me 4 pikat tjera.

Pra, gjithsej kemi $5\cdot 6=30$ rrafshe. Meqenëse secili prej tyre paraqitet 3 herë (p.sh. $A_1A_2A_3, A_2A_3A_1, A_3A_1A_2$) gjithsej do të kemi $30:3=10$ rrafshe.

Le të përgjithësojmë detyrën për *n* – pika.

Duke fiksuar secilën prej *n*-pikave të dhëna do të fitojmë $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ rrafshe. Pse? Meqë kemi *n* pika dhe meqë secili nga rrafshet paraqitet tri herë kemi $n\cdot\frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ rrafshe.

Detyra për ushtrime

4. Janë dhënë *n* pika $(n\geq 3)$, çdo katër prej të cilave janë jokomplanare. Të caktohet numri *n* nëse numri i rrafsheve që ato përcaktojnë është 10 herë më i madh se numri i pikave.

5. Janë dhënë 15 pika. Sa drejtëza dhe rrafshe më së shumti mund të përcaktohen prej tyre?

4. Do të paraqesim në vijim disa aksioma. Disa prej tyre do t'i përdorim gjatë zgjidhjes së detyrës së dhënë.

Aksioma 1: Nëpër dy pika të ndryshme kalon një drejtëz e vetme.

Aksioma 2: Në qoftë se drejtëza ka dy pika të përbashkëta me rrafshin, atëherë të gjitha pikat e drejtëzës i takojnë atij rrafshi.

Aksioma 3: Nëpër tri pika të ndryshme A, B, C jokolineare kalon një rrafsh i vetëm (të cilit ato i takojnë).

Aksioma 4: Në qoftë se dy rrafshe të ndryshme kanë një pikë të përbashkët, atëherë ato kanë së paku edhe një pikë tjetër të përbashkët.

Aksioma 5: Nëpër një pikë që nuk i takon drejtëzës së dhënë, në rrafshin e përcaktuar prej tyre kalon vetëm një drejtëz paralele më drejtëzën e dhënë.

Aksioma 6: Në qoftë se pika *B* ndodhet ndërmjet pikave *A* dhe *C*, atëherë, A, B, C janë tri pika të ndryshme të një drejtëze dhe pika *B* poashtu ndodhet ndërmjet pikave *C* dhe *A*.

Aksioma 7: Për çdo dy pika të ndryshme *A* dhe *B*, në drejtëzën $d(AB)$ ekziston së paku një pikë *C* e tillë që $A-B-C$ dhe së paku një pikë *D* e tillë që $A-B-D$.

Aksioma 8: Në qoftë se A, B, C janë tri pika të ndryshme të një drejtëze, atëherë vetëm njëra prej tyre ndodhet ndërmjet dy pikave të tjera.

Aksioma 9: (*Aksioma e Pashit*) Le të jenë A, B, C tri pika jokolineare dhe d drejtëz, që i takojnë një rrafshi ashtu që pikat A, B, C nuk i takojnë drejtëzës d. Nëse drejtëza d ndërpren njërin prej segementeve (AB), (BC) dhe (AC) ajo gjithashtu e ndërpren njërin prej dy segmenteve tjera.

Në fillim do të tregojmë se çdo segment ka pambarimisht shumë pika.

Le të jetë *AB* një segment i çafrëdoshëm. Në bazë të *aksiomës 7* ndërmjet pikave *A* dhe *B* ekziston të paktën edhe një pikë *C*. Për të njëjtat arsye ndëmjet pikave *A* dhe *C* ekziston të paktën edhe një pikë *D*. Nga $A-D-C$ dhe $A-C-B$ kemi $A-D-B$. Pse? Kështu mund të gjejmë sa të duam pika të segmentit *AB*.

Kthehemi tek zgjidhja e detyrës.

i) Në bazë të *aksiomës 2* kemi se drejtëza ka të paktën dy pika, kurse nga pohimi i vërtetuar, ndërmjet dy pikave ka pambarim shumë pika. Pra, çdo drejtëz ka pambarimisht shumë pika.

ii) Çdo rrafsh ka të paktën tripika jokolineare, p.sh. A, B, C. Çdo drejtëz e përcaktuar nga pika *A* dhe cilado pikë e drejtëzës *BC* i takon këtij rrafshi. Meqë drejtëza *BC* ka pambarimisht shumë pika atëherë nga i) edhe rrafshi ka pambarimisht shumë rrafshe.

5. Supozojmë se vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë kolinearë. Atëherë ekziston numri α i tillë që $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{b}$, prej nga $\vec{a}-\alpha\cdot\vec{b}=\vec{0}$. Për $m=1$ dhe $n=-\alpha$ merret $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$.

Anasjelltas. Supozojmë se vlen $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$. Supozojmë se $m\neq 0$. Atëherë $\vec{a}=-\dfrac{m}{n}\vec{b}\Rightarrow\vec{a}=k\vec{b}$, ku $k=-\dfrac{m}{n}$.

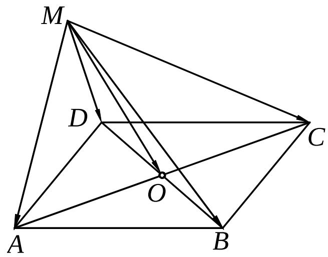
Pra, vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë kolinearë.

Detyra për ushtrime

6. Të tregohet se vektorët $\vec{a}=14\vec{m}+21p\vec{n}-7\vec{p}$, $\vec{b}=4\vec{m}+6\vec{n}-2\vec{p}$ janë paralel.

7. Të caktohen numrat realë x, y ashtu që vektorët $\vec{a}=2\vec{m}+(1+x)\vec{n}+\vec{p}$; $\vec{b}=3\vec{m}+(x+y)\vec{n}+y\vec{p}$ të jenë paralel.

6.

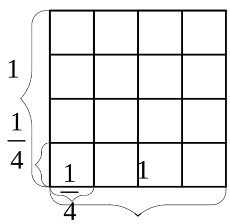


$$\begin{cases} \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AO} \\ \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO} \\ \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CO} \\ \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DO} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$$
$$= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}.$$

Prandaj $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$.

7. Katrorin e dhënë e ndajmë në 16 katror me gjatësi të brinjës $\frac{1}{4}$ (shih figurën). Në bazë të *parimit të Dirileut* së paku njëri katror përmban 6 pika. Le të njehsojmë rrezen e rrethit të jashtëshkruar në atë katror.



Qartë se $r = \frac{d}{2}$, ku r është rrezja e rrethit të jashtëshkruar në katror dhe d është diagonalja e katrorit.

Meqë brinjët e katrorit kanë gjatësinë $\frac{1}{4}$, nga *teorema e Pitagorës* kemi

$$d^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2\sqrt{2}} .$$

Atëherë $r = \frac{d}{2} = \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} < \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

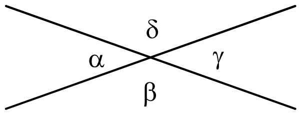
Pra, ekziston rrethi me rreze më të vogël se $\frac{1}{4}$ i cili përmban 6 pika nga 81 pikat e dhëna.

Detyra për ushtrime

8. Në katrorin me brinjë 1 janë vendosur 65 pika të ndryshme. Të tregohet se ekziston segmenti që formohet nga 2 prej pikave të dhëna, gjatësia e të cilit nuk është më e madhe se $\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

9. Në rrethin me rreze 1 janë vendosur 101 pika të ndryshme. Të tregohet se ekziston katrori me syprinë $\frac{1}{4}$ i cili përmban së paku 26 pika nga pikat e dhëna.

8. Le të jenë *a, b* drejtëzat e dhëna dhe $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ këndet që ato formojnë. Vlen $\alpha=\gamma,\ \beta=\delta$ sepse këndet α dhe γ (poashtu këndet β dhe δ) janë kënde kryqëzore.



Atëherë nga relacioni $11(\alpha+\gamma)=7(\beta+\delta)$ merret $11\cdot 2\alpha=7\cdot 2\beta \Rightarrow 11\alpha=7\beta$. Është e qartë se $\alpha+\beta=180^\circ$. Pse? Atëherë $\alpha=180^\circ-\beta$.

Kemi $11\alpha=7(180^\circ-\beta)\Rightarrow 18\alpha=7\cdot 180^\circ \Rightarrow \alpha=70^\circ,\ \beta=180^\circ-\alpha=110^\circ$.

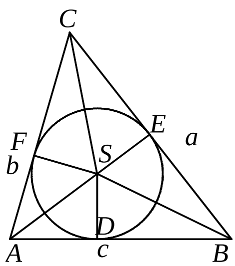
Përfundojmë se $\alpha=\gamma=70^\circ,\ \beta=\delta=110^\circ$.

Detyra për ushtrime

10. Drejtëzat *a* dhe *b* priten dhe formojnë 4 kënde $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. Të vërtetohet se nëse njëri kënd është i dretë atëherë të tillë janë edhe tri këndet e tjera.

11. Drejtëzat *a* dhe *b* priten dhe formojnë 4 kënde: dy kënde të ngushta α dhe γ dhe dy kënde të gjera β dhe δ. Të caktohen këndet $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ nëse $4(2\alpha+\beta)=5(\gamma+\delta)$.

9. Le të jetë dhënë trekëndëshi *ABC*. Le të shënojmë me *S* qendrën e rrethit të brendashkruar në trekëndëshin *ABC* (shih figurën). Atëherë



$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABS}+S_{\Delta BCS}+S_{\Delta CAS}$$

$$S_{\Delta ABS}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|DS|=\frac{1}{2}c\cdot r$$

$$S_{\Delta BCS}=\frac{1}{2}|BC|\cdot|ES|=\frac{1}{2}a\cdot r$$

$$S_{\Delta CAS}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|FS|=\frac{1}{2}b\cdot r.$$

Pra $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$

$$\Rightarrow 2S_{\Delta ABC}=(a+b+c)\cdot r \qquad (1)$$

Poashtu vlen $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$.

Atëherë

$$2S_{\Delta ABC}=a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h_c \qquad (2)$$

Nga (1) dhe (2) kemi $(a+b+c)\cdot r=a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h_c$.

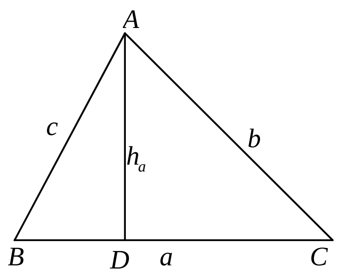
D.m.th. $\frac{1}{h_a}=\frac{1}{r}\cdot\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{1}{h_b}=\frac{1}{r}\cdot\frac{b}{a+b+c}$, $\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}\cdot\frac{c}{a+b+c}$.

Duke mbledhur barazitë e fundit kemi:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}\right)=\frac{1}{r},$$

gjë që duhej treguar.

10. Le t'i referohemi figurës.



Nga zbatimi i *teoremës së Pitagorës* në trekëndëshat *ABD* dhe *ADC* kemi:

$$h_a^2=c^2-|BD|^2 \qquad (1)$$

$$h_a^2=b^2-(a-|BD|)^2 \qquad (2)$$

Pra $h_a^2=c^2-|BD|^2$

$$h_a^2=b^2-a^2+2a|BD|+|BD|^2$$

Duke zbritur barazitë e mësipërme merret

$$|BD|=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

Atëherë nga (1) kemi

$$h_a^2=c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2=\left(c-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)$$

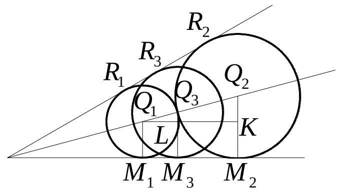
$$=\left(\frac{b^2-(a-c)^2}{2a}\right)\left(\frac{(a+c)^2-b^2}{2a}\right)$$

$$=\frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{4a^2}\text{, prej nga}$$

$$h_a=\frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(b+a-c)(a+c-b)}\ ,$$

gjë që duhej treguar.

11. Le të jenë Q_1, Q_2 qendrat e rrathëve të dhënë dhe $Q_1 \cap Q_2 = \{Q_3\}$ (pra Q_3 është pika e takimit të rrathëve R_1 dhe R_2.



Le të jenë M_1, M_2 dhe M_3 pikat e takimit të rrathëve R_1, R_2, R_3 me njërin krah të këndit të dhënë, përkatësisht.

Atëherë

$|Q_1M_1| = r_1; |Q_2M_2| r_2, |Q_3M_3| = r_3, \quad r_2 > r_1.$

Le të jetë *K* pikë e segmentit Q_2M_2 e tillë që $Q_1K \parallel M_1M_2$ kurse pikëprerja e segmenetve Q_1K dhe Q_3M_3 le të jetë *L*. Është e qartë se trekëndëshat Q_1Q_2K dhe Q_1Q_3L janë të ngjashëm. Pse?

Atëherë

$$\frac{|Q_3L|}{|Q_2K|} = \frac{|Q_1Q_3|}{|Q_1Q_2|} \qquad (1)$$

Meqë $|Q_1Q_3| = r, |Q_1Q_2| = r_1 + r_2, \ |Q_2K| = r_2 - r_1$.

Nga (1) marrim $|Q_3L| = r_1 \cdot \dfrac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}$.

Përfundimisht kemi $r_3 = |Q_3M_3| = |Q_3L| + |LM| = r_1 \cdot \dfrac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} + r_1 = \dfrac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$, gjë që duhej treguar.

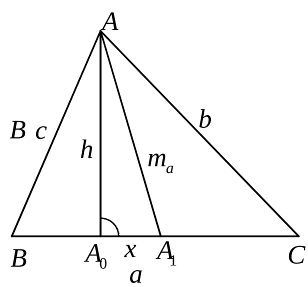
12. Le të vërtetojmë së pari relacionet:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \qquad (1)$$

$$m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \qquad (2)$$

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \qquad (3)$$

Le të jetë dhënë trekëndëshi *ABC* (shih figurën).



Le të jetë $|AA_1| = m_a$ dhe $|AA_0| = h_a$ - lartësia e lëshuar nga kulmi *A*.

Supozojmë se këndet pranë kulmeve *B* dhe *C* janë të ngushtë dhe $|AC| > |AB|$.

Me zbatimin e *teoremës së Pitagorës* në trekëndëshat ABA_0 dhe AA_0C merret:

$$c^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = h_a^2 + x^2 + \frac{a^2}{4} - ax \qquad (4)$$

$$b^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = h_a^2 + x^2 + \frac{a^2}{4} + ax \qquad (5)$$

Nga trekëndëshi AA_0A_1 kemi $h_a^2 + x^2 = m_a^2$ (6)

Nga (4), (5) dhe (6) merret

$$b^2 + c^2 = 2h_a^2 + 2x^2 + \frac{a^2}{2} = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \Rightarrow m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)\ .$$

Ngjashëm tregohen (2) dhe (3).

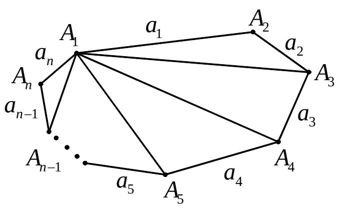
Atëherë $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Në bazë të mosbarazisë $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$ merret $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \le \frac{27}{4}R^2$ e në bazë të një detyre të zgjidhur më parë (detyra 15 tek mosbarazimet) kemi:

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \le 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \le \frac{81}{4}R^2$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R \Rightarrow \frac{9R}{m_a + m_b + m_c} \ge 2\ .$$

13. Së pari do të tregojmë se gjatësia e brinjës më të madhe e shumëkëndëshit është më e vogël se shuma e gjatësive e brinjëve të tjera të shumëkëndëshit.



Le të jetë a_1 është brinja më e gjatë e shumëkëndëshit $A_1, A_2, ..., A_n$ dhe $a_2, ..., a_n$ brinjët e tjera.

Duhet të tregojmë se $a_1 < a_2 + ... + < a_n$.

Zbatojmë faktin se gjatësia e brinjës së trekëndëshit është më e vogël se shuma e gjatësive të dy brinjëve të tjera.

Kemi:

$$a_1 < a_2 + A_1A_3$$

$$< a_2 + a_3 + A_1A_4$$
$$< a_2 + a_3 + a_4 + A_1A_5$$
$$\ldots$$
$$< a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + A_1A_{n-1}$$
$$< a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + A_1A_n$$
$$= a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Pra $a_1 < a_2 + a_2 + \ldots + a_n$, gjë që duhej treguar.

Tregojmë tani pohimin e detyrës.

Supozojmë se për brinjët $a_1, \ldots, a_n$ të shumëkëndëshit $A_1A_2 \ldots A_n$ vlen $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$.

Supozojmë të kundërtën, pra se nuk ekzistojnë dy brinjë, raporti i gjatësive të të cilave është më i vogël se 2. D.m.th. $a_1 \geq 2a_2, a_2 \geq 2a_3, \ldots, a_{n-1} \geq 2a_n$.

Atëherë

$$a_1 \geq a_2 + a_2$$
$$\geq a_2 + 2a_3$$
$$\geq a_2 + a_3 + 2a_4$$
$$\ldots$$
$$\geq a_2 + a_3 + \ldots a_{n-1} + 2a_n$$
$$> a_2 + a_3 + \ldots a_{n-1} + a_n ,$$

gjë që nuk është e mundur.

Përfundojmë se ekzistojnë dy brinjë raporti i gjatësive të të cilave është më i vogël se 2.

Transformimet algjebrike

1. Nga kushtet e detyrës kemi

$$P(x,y)=Q(x,y)\cdot\frac{1}{2}\cdot Q(x,y)+\frac{1}{4}P(x,y) \qquad (1)$$

Transformojmë relacionin (1).

$$P(x,y)-\frac{1}{4}P(x,y)=\frac{1}{2}Q^2(x,y)$$

$$\frac{3}{4}P(x,y)=\frac{1}{2}Q^2(x,y)\Rightarrow\frac{3}{2}P(x,y)=Q^2(x,y).$$

Në anën tjetër vërejmë se:

$$x^4+2x^2(1-y)+(1-2y)+y^2=x^4+2x^2-2x^2y+1-2y+y^2$$

$$=(x^2+1)^2-2(x^2+1)y+y^2=(x^2+1-y)^2.$$

D.m.th. $P(x,y)=\frac{2}{3}(x^2+1-y)^2$.

Pra $\frac{3}{2}P(x,y)=Q^2(x,y)\Rightarrow(x^2+1-y)^2=Q^2(x,y)$.

Përfundojmë se $Q(x,y)=x^2+1-y$ ose $Q(x,y)=y-x^2-1$.

Detyrë për ushtrime

1. A ekziston polinomi $P(x)$ i shkallës së tretë i cili kur pjesëtohet me $x-1$ jep mbetjen 3 kurse plotëpjesëtohet me $(x-1)^2$.

2. Transformojmë polinomin e dhënë si vijon:

$$P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz$$

$$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz)$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2+y^2-2yz+z^2)$$

$$=\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(x-z)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2 .$$

Vërejmë se nëse $x=y=z$ atëherë $P(x,y,z)=0$. Në të gjitha rastet tjera vlera e polinomit $P(x,y,z)$ është pozitive.

3. Së pari vërejmë se për $x>y>z$ vlen $x+y+z\neq 0$ dhe $x+y-z\neq 0$. Pse? Transformojmë shprehjen e dhënë dhe marrim:

$$(x-y+z)(x+y-z)=(x+y+z)(x-y-z)$$

$$(x-(y-z))(x+(y-z))=(x+(y+z))(x-(y+z))$$

$$x^2-(y-z)^2=x^2-(y+z)^2$$

$$y^2-2yz+z^2=y^2+2yz+z^2 .$$

Pra $4yz=0\Rightarrow y=0$ ose $z=0$, gjë që duhej treguar.

Detyra për ushtrime

2. Nëse numrat realë x,y,z plotësojnë kushtin $x>y>z$ dhe nëse $\frac{x^2-y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2-z^2}$ atëherë të paktën njëri nga numrat y,z është zero. Por veç kushtit të mësipërm numrat x,y,z duhet të plotësojnë edhe një kusht tjetër. Cili është ai kusht?

3. Nëse $a\geq b, b\geq c$ dhe $a^3+3ab^2+3bc^2+c^2+a^2=c^3+3a^2b+3b^2c+2ac$ atëherë $a=b=c.$ Vërtetoni.

4. Relacionin fillestar e transformojmë si vijon:

$$(ab+2c^2)^2=c(a+b+2c)(2ab-ac-bc+2c^2)$$

$$(ab+2c^2)^2=c(a+b+2c)(2ab-c(a+b-2c))$$

$$(ab+2c^2)^2=2abc(a+b+2c)-c^2(a+b+2c)(a+b-2c)$$

$$(ab+2c^2)^2+c^2((a+b)^2-(2c)^2)=2abc(a+b+c+c)$$

$$(ab+2c^2)^2+c^2(a^2+2ab+b^2-4c^2)=2abc(a+b+c)+2abc^2$$

$$(ab+2c^2)^2+c^2(a^2+b^2-4c^2)+2abc^2=2abc(a+b+c)+2abc^2$$

$$(ab+2c^2)^2+a^2c^2+b^2c^2-4c^4=2abc(a+b+c)$$

$$a^2b^2+4abc^2+4c^4+a^2c^2+b^2c^2-4c^4=2a^2bc+2ab^2c+2abc^2$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc^2=2a^2bc+2ab^2c$$

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc^2-2a^2bc-2ab^2c=0$$

$$a^2b^2-2ab^2c-2a^2bc+b^2c^2+c^2a^2+2abc^2=0$$

$$(ab)^2-2ab(bc+ca)+(bc+ca)^2=0$$

$$(ab-(bc+ca))^2=0\,.$$

Pra $ab-(bc+ca)=0\Rightarrow ab=c(b+a)$.

Përfundimisht $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{c}{b}$, gjë që duhej treguar.

5. Detyrën do ta zgjidhim në dy mënyra.

Mënyra e parë. Shprehjen $3x^2$ do ta shkruajmë në trajtën $3x^2=x^2+2x^2$. Transformojmë polinomin $P(x)$ si vijon:

$$P(x)=x^4-3x^3+x^2+2x^2-3x+2=x^4+x^2-3x^3-3x+2x^2+2$$

$$=x^2(x^2+1)-3x(x^2+1)+2(x^2+1)=(x^2+1)(x^2-3x+2)$$

$$=(x^2+1)(x^2-x-2x+2)=(x^2+1)(x(x-1)-2(x-1))$$

$$=(x^2+1)(x-1)(x-2)\,.$$

Mënyra e dytë. Gjymtyra e lirë e polinomit $P(x)$ është 2. Është e qartë se faktorët e gjymtyrës së lirë janë $\pm1,\pm2$. Meqë $P(-1)=(-1)^4-3(-1)^3+3(-1)^2-3(-1)+2=12$, përfundojmë se -1 nuk është rrënjë e polinomit.

Provojmë vlerën 1. $P(1)=1^4-3\cdot1^3+3\cdot1^2-3\cdot1+2=0$. D.m.th. numri 1 është rrënjë e polinomit.

Pra $P(x)=(x-1)\cdot Q(x)$. Është e qartë se për të përcaktuar polinomin $Q(x)$ duhet pjesëtuar $P(x)$ me $x-1$.

Merret:

$$(x^4-3x^3+3x^2-3x+2):(x-1)=x^3-2x^2+x-2$$

$$\underline{\pm x^4 \mp x^3}$$

$$-2x^3+3x^2-3x+2$$

$$\underline{\mp 2x^3 \pm 2x^2}$$

$$x^2-3x+2$$

$$\underline{\pm x^2 \mp x}$$

$$-2x+2$$

$$\underline{\mp 2x \pm 2}$$

$$0$$

D.m.th. $Q(x)=x^3-2x^2+x-2$.

Tani vërejmë se polinomin $Q(x)$ mund ta faktorizojmë si vijon:

$Q(x)=x^3-2x^2+x-2=x^2(x-2)+(x-2)=(x^2+1)(x-2)$.

Përfundojmë se $P(x)=(x^2+1)(x-1)(x-2)$.

Shënim. Në këtë detyrë pamë se ishte e lehtë të faktorizohet polinomi $Q(x)$. Në rastet kur faktorizimi i polinomit $Q(x)$ "*nuk është i lehtë*" atëherë veprohet si në fillim të mënyrës së dytë të zgjidhjes, d.m.th. caktohen faktorët e gjymtyrës së lirë dhe provohen nëse ndonjëri prej tyre paraqet rrënjë të polinomit. Pastaj zbërthimi i polinomit $Q(x)$ vazhdon si në rastin e zbërthimit të polinomit $P(x)$ tek mënyra e dytë.

Detyrë për ushtrime

4. Të zbërthehet në faktor polinomi $P(x)=3x^3-2x^2-15x+14$.

6. Le të transformojmë shprehjen $\left(a+\frac{1}{a}\right)^3\cdot\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$.

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^3\cdot\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=\left(a^3+3a+\frac{3}{a}+\frac{1}{a^3}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$$

$$=\left(a^3+\frac{1}{a^3}+3\left(a+\frac{1}{a}\right)\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$$

$$=\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+3\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$$

$$=a^5+a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^5}+3\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$$

$$=a^5+\frac{1}{a^5}+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(1+3\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\right).$$

Pra $a^5+\frac{1}{a^5}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(1+3\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\right)$

$$=a^2+\frac{1}{a^2}-1-3\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right) \quad \text{(sepse } a+\frac{1}{a}=1\text{)}$$

$$=-1-2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=-1-2\left(\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\right)$$

$=-1-2(1-2)=-1+2=1$, gjë që duhej treguar.

Detyrë për ushtrime

5. Vërtetoni se nëse $a^2+\frac{1}{a^2}=1$ atëherë $a^9+\frac{1}{a^9}=0$.

7. Le të transformojmë së pari emëruesin e shprehjes së dhënë

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$$

$$=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)\,.$$

Atëherë do të kemi

$$\frac{x^2+2}{x^4+4}=\frac{A}{x^2+2-2x}+\frac{B}{x^2+2+2x} \qquad (1)$$

Duke shumëzuar të dy anët e relacionit (1) me $(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)$ merret

$$x^2+2=A(x^2+2+2x)+B(x^2+2-2x)$$

$$x^2+2=(A+B)x^2+2A+2B+(2A-2B)x$$

$$x^2+0\cdot x+2=(A+B)x^2+2(A-B)x+2(A+B)$$

Duke barazuar koeficientët e anës së majtë me ata të anës së djathtë merret

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \tag{2}$$

Duke zgjidhur sistemin (2) merret $A=B=\dfrac{1}{2}$.

Përfundojmë se $\dfrac{x^2+2}{x^4+4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+2-2x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+2+2x}$.

8. Së pari është e qartë se $x\neq 0$ dhe $x\neq 2$. Pse?

Meqë shprehjet x dhe $x+1$ paraqiten në vlera absolute atëherë ato shprehje i barazojmë me zero dhe pastaj caktojmë intervalet në të cilat duhet shqyrtuar detyrën.

Nxënësi e ka të lehtë të arsyetojë se duhet shqyrtuar tri raste:

1) $x\in(-\infty,-1]$ 2) $x\in(-1,0)$ 3) $x\in(0,\infty)\setminus\{2\}$.

Shqyrtojmë veçmas rastet e mësipërme:

1) Nëse $x\in(-\infty,-1]$, atëherë në bazë të përkufizimit të vlerës absolute kemi $|x|=-x, |x+1|=-x-1$. Atëherë kemi

$$\frac{x^2-1+|x+1|}{|x|(x-2)}=\frac{(x-1)(x+1)+(-x-1)}{-x(x-2)}=\frac{(x+1)(x-1-1)}{-x(x-2)}=-\frac{x+1}{x}.$$

2) Nëse $x\in(-1,0)$ kemi $x+1>0$ prandaj $|x+1|=x+1$, kurse $|x|=-x$. Atëherë kemi

$$\frac{x^2-1+|x+1|}{|x|(x-2)}=\frac{(x-1)(x+1)+(x+1)}{-x(x-2)}=\frac{(x+1)(x-1+1)}{-x(x-2)}=\frac{x+1}{2-x}.$$

3) Nëse $x\in(0,\infty)\setminus\{2\}$ atëherë $|x+1|=x+1, |x|=x$.

Pra $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{|x|(x-2)}=\dfrac{(x-1)(x+1)+(x+1)}{x(x-2)}=\dfrac{(x+1)x}{x(x-2)}=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Detyra për ushtrime

6. Të thjeshtohet shprehja $\dfrac{|x|(x^3-7x^2+14x-8)}{(x^3-5x^2+6x)|x-1|}$.

7. Të thjeshtohet shprehja $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}-2}{|x|\cdot|x-4|}$.

9. Nëse transformojmë anën e djathtë merret:

$$(a+b)\cdot(a^{100}-a^{99}b+a^{98}b^2-...+a^2b^{98}-ab^{99}+b^{100})$$

$$=a^{101}-a^{100}b+a^{99}b^2-...+a^3b^{99}-a^2b^{99}+ab^{100}$$

$$+a^{100}b-a^{99}b^2+...+a^2b^{99}-ab^{100}+b^{101}=a^{101}+b^{101}.$$

Tregojmë tani pjesën tjetër të detyrës.

Nga ajo që vërtetuam pamë se $a^{101}+b^{101}=(a+b)\cdot S$, ku

$$S=a^{100}-a^{99}b+a^{98}b^2-...+a^2b^{98}-ab^{99}+b^{100}.$$

Anëtarët e shumës i grupojmë si vijon:

$$1^{101}+2^{101}+...+100^{101}+101^{101}$$

$$=(1^{101}+100^{101})+(2^{101}+99^{101})+...+(50^{101}+51^{101})$$

$$=(1+100)S_1+(2+99)S_2+...+(50+51)S_{50}$$

$$=101S_1+101S_2+...+101S_{50}$$

$=101(S_1+S_2+...+S_{50})=101S$, që tregon se shuma e dhënë plotëpjestohet me 101. Është e qartë se $S=S_1+S_2+...+S_{50}$, kurse

$$S_1=1^{100}-1^{99}\cdot 100+1^{98}\cdot 100^2-...+100^{100},$$

$S_2=2^{100}-2^{99}\cdot 99+...+99^{100}$ e kështu me radhë.

Detyra për ushtrime

8. Le të jenë a,b numra realë. Vërtetoni se vlen

$$a^{101}-b^{101}=(a-b)\cdot(a^{100}+a^{99}b+...+ab^{99}+b^{100}).$$

9. Vërtetoni se

$$100^{2004}+99^{2004}+...+90^{2004}-1^{2004}-9^{2004}-17^{2004}-25^{2004}$$

$$-33^{2004}-41^{2004}-49^{2004}-57^{2004}-65^{2004}-73^{2004}-81^{2004}$$

plotëpjestohet me 9.

10. Së pari transformojmë shprehjen $x^2+y^2+z^2-2(x+4y)+17=0$. Merret

$$x^2+y^2+z^2-2x-8y+1+16=0$$

$x^2-2x+1+y^2-8y+16+z^2=0$

$(x-1)^2+(y-4)^2+z^2=0$.

Kjo është e mundur vetëm kur $x=1, y=4, z=0$.

D.m.th. $P(x,y,z)=x^{2004}+2004y+2004^z=1^{2004}+2004\cdot 4+2004^0=8018$.

Detyrë për ushtrime

10. Të caktohet vlera e polinomit $P(x,y)=x^y+y^x$ nëse dihet se 2^x+y plotëpjestohet me 10, ku x është numri më i vogël me këtë veti kurse y numër i thjeshtë.

11. Së pari numrin dhjetor do ta paraqesim në trajtë të thyesës. Le të jetë $x=1.414141...$. Atëherë $100x=141.414141...$.

Kështu merret $100x-x=99x=141.414141...-1.414141...=140$.

D.m.th. $x=\dfrac{140}{99}$.

Në vijim, nxënësi e ka të lehtë të tregojë se $21+12\sqrt{3}=(3+2\sqrt{3})^2$, d.m.th. $\sqrt{21+12\sqrt{3}}=3+2\sqrt{3}$.

Po ashtu $37-20\sqrt{3}=(5-2\sqrt{3})^2$. D.m.th. $\sqrt{37-20\sqrt{3}}=5-2\sqrt{3}$.

Në vazhdim le ta transformojmë emëruesin si vijon:

$$(\sqrt{22}-\sqrt{6})\sqrt{7+\sqrt{33}}=\sqrt{2}(\sqrt{11}-\sqrt{3})\sqrt{7+\sqrt{33}}$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{11}-\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{7+\sqrt{33}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{11-2\sqrt{33}+3}\cdot\sqrt{7+\sqrt{33}}$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2(7-\sqrt{33})}\cdot\sqrt{7+\sqrt{33}}=2\sqrt{49-33}=2\cdot\sqrt{16}=2\cdot 4=8.$$

Pra $A=\dfrac{\dfrac{140}{99}+3+2\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}}{8}=\dfrac{140+8\cdot 99}{8\cdot 99}=\dfrac{243}{198}$.

Përfundojmë se A është numër racional dhe ka vlerën $\dfrac{243}{198}$.

Shënim. Pak më parë shfrytëzuam faktin që $21+12\sqrt{3}=(3+2\sqrt{3})^2$. Shtrohet pyetja: si arritëm në rezultatin e mësipërm?

Shprehjen $\sqrt{21+12\sqrt{3}}$ do ta barazojmë me $a+b\sqrt{3}, a,b\in\mathbb{Z}$. Një barazim i tillë është i kuptueshëm sepse pasi të ngriten në katror, në të dy anët e barazimit do të paraqitet $\sqrt{3}$. Le të shohim këtë në vijim.

$$\sqrt{21+12\sqrt{3}}=a+b\sqrt{3} \Leftrightarrow 21+12\sqrt{3}=(a+b\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow 21+12\sqrt{3}=a^2+2ab\sqrt{3}+3b^2 \Leftrightarrow 21+12\sqrt{3}=a^2+3b^2+2ab\sqrt{3}$$

prej nga merret sistemi $\begin{cases} ab=6 \\ a^2+3b^2=21 \end{cases}$.

Nga $ab=6\Rightarrow a=\frac{6}{b}$. Këtë e zëvendësojmë në shprehjen e dytë dhe merret

$$\left(\frac{6}{b}\right)^2+3b^2=21 \Leftrightarrow \frac{36}{b^2}+3b^2=21 \Leftrightarrow \frac{12}{b^2}+b^2=7$$

Barazimin e fundit e shkruajmë si vijon:

$$b^4-7b^2+12=0 \Leftrightarrow b^4-3b^2-4b^2+12=0 \Leftrightarrow b^2(b^2-3)-4(b^2-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (b^2-3)(b^2-4)=0.$$

Meqë a,b janë numra të plotë atëherë mbetet që $b=\pm 2$. Atëherë $a=\pm 3$.

Përfundimisht merret $a=3, b=2$. Pse? D.m.th. $\sqrt{21+12\sqrt{3}}=3+2\sqrt{3}$.

Ngjashëm tregohet se $\sqrt{37-20\sqrt{3}}=5-2\sqrt{3}$.

12. Në mënyrë që të merret ndryshimi i katrorëve shprehjes $x^{4n}+4y^{4n}$ i shtojmë dhe i zbresim $4x^{2n}y^{2n}$.

$$x^{4n}+4y^{4n}=x^{4n}+4x^{2n}y^{2n}+4y^{4n}-4x^{2n}y^{2n}=(x^{2n}+2y^{2n})^2-(2x^ny^n)^2$$

$$=(x^{2n}+2y^{2n}-2x^ny^n)(x^{2n}+2y^{2n}+2x^ny^n).$$

Tregojmë tani pjesën tjetër të detyrës:

$$5^{2004}+4^{2005}=5^{4\cdot 501}+4\cdot 4^{4\cdot 501}$$

$$=(5^{2\cdot 501}+2\cdot 4^{2\cdot 501}-2\cdot 5^{501}\cdot 4^{501})(5^{2\cdot 501}+2\cdot 4^{2\cdot 501}+2\cdot 5^{501}\cdot 4^{501})$$

$$=(5^{1002}+2\cdot 4^{1002}-2\cdot 20^{501})(5^{1002}+2\cdot 4^{1002}+2\cdot 20^{501})$$

që tregon se numri $5^{2004}+4^{2005}$ është numër i përbërë.

Detyra për ushtrime

11. Shprehja $x^{16n}+64y^{32n}$ të shprehet si prodhim i dy polinomeve.

12. Shprehja $x^{16n}-1$ të shprehet si prodhim i pesë polinomeve.

13. Transformojmë shprehjen e dhënë si vijon:

$$P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2(x+2y+3z)+14$$

$$=x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2.$$

Meqë $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\geq 0$, mbetet që 0 është vlera më e vogël që merr polinomi $P(x,y,z)$ e kjo arrihet për $x=1, y=2, z=3$, gjë që duhej treguar.

Detyra për ushtrime

13. Të caktohen numrat më të vegjël natyror x,y,z për të cilët polinomi $P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\left(x+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}\right)+\frac{21}{64}$ arrin vlerën më të vogël.

14. Të caktohen x,y,z për të cilët polinomi $P(x,y,z)=2y+z-y^2-z^2-x^2-\frac{5}{4}$ arrin vlerën më të madhe.

15. Të caktohet vlera minimale e polinomit $P(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+x+2y+3z$.

14. Transformojmë shprehjen në anën e majtë të barazimit

$$xyz+xy+xz+yz+x+y+z+1$$

$$=xyz+xy+xz+x+yz+y+z+1$$

$$=xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+(z+1)$$

$$=(xy+x+y+1)(z+1)=(x(y+1)+(y+1))(z+1)$$

$$=(x+1)(y+1)(z+1).$$

Në anën tjetër në bazë të detyrës 13 të kapitullit të parë kemi $2004=2^2\cdot 3\cdot 167$. Pra $(x+1)(y+1)(z+1)=2^2\cdot 3\cdot 167$.

Meqë $x>y, x>z$ atëherë $x+1=167\Rightarrow x=166$.

Për y, z kemi këto mundësi:

$y+1=4, z+1=3$, $\quad$ $y+1=3, z+1=4$,

$y+1=2, z+1=6$, $\quad$ $y+1=6, z+1=2$.

Përfundimisht merren këto treshe:

$(166,3,2),(166,2,3),(166,1,5),(166,5,1)$.

Detyrë për ushtrime

16. Të caktohen të gjitha treshet e numrave natyror (x, y, z) për të cilët

$$xyz+3xy+2xz+yz+6x+3y+2z+6=180$$

dhe që z të jetë numër i thjeshtë.

15. Le të jetë $1+2+...+n$ shuma e n numrave të parë natyror. Transformojmë shumën e dhënë:

$$1+2+3+...+(n-2)+(n-1)+n$$

$$=(1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+...$$

$$=\underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+...}_{\frac{n}{2}\text{ here}}=\frac{n}{2}(n+1).$$

Le t'i kthehemi vërtetimit. Supozojmë të kundërtën, pra se shuma e të gjithë numrave natyror nga 1 deri në n mund të jetë numër katërshifror me të gjitha shifrat e njëjta.

Atëherë kemi $\frac{n}{2}(n+1)=k\cdot 1111 \Rightarrow n(n+1)=2k\cdot 1111,\ k\in\{1,2,...,9\}$.

Numri 1111 pas zbërthimit në faktor të thjeshtë mund të shkruhet në trajtën $1111=11\cdot 101$. Pra $n(n+1)=2k\cdot 11\cdot 101$.

Meqë në anën e majtë kemi prodhim të dy numrave të njëpasnjëshëm mbetet që $22k=100$ ose $22k=102$.

Në të dy rastet merret që k nuk është numër natyror.

Pra, supozimi ynë qenka i gabuar. Me këtë përfunduam vërtetimin.

Detyrë për ushtrime

17. A është e mundur që shuma $1+2+...+n$, për ndonjë n numër natyror të përfundojë me shifrat 45?

16. Nga $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}$ merret $a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{b-c}{bc}$.

Nga $b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$ merret $b-c=\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{c-a}{ac}$.

Nga $a+\frac{1}{b}=c+\frac{1}{a}$ merret $a-c=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$.

Atëherë $(a-b)(b-c)(a-c)=\frac{b-c}{bc}\cdot\frac{c-a}{ac}\cdot\frac{b-a}{ab}=\frac{(b-c)(c-a)(b-a)}{a^2b^2c^2}$.

D.m.th. $(a-b)(b-c)(a-c)-\frac{(b-c)(c-a)(b-a)}{a^2b^2c^2}=0$

$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c)\left(1-\frac{1}{a^2b^2c^2}\right)=0.$$

Meqë $a\neq b\neq c\neq a$ atëherë $(a-b)(b-c)(a-c)\neq 0$.

Mbetet që $1-\frac{1}{(abc)^2}=0\Leftrightarrow\frac{(abc)^2-1}{(abc)^2}=0$.

D.m.th. $(abc-1)(abc+1)=0\Rightarrow abc=1$ ose $abc=-1$.

Përfundojmë se $|abc|=1$, gjë që duhej treguar.

Detyrë për ushtrime

18. Nëse a,b,c janë numra realë të tillë që

$$a^2+\frac{1}{b^2}=b^2+\frac{1}{c^2}=c^2+\frac{1}{a^2},\ abc\neq 0,\ a\neq b\neq c\neq a$$

atëherë tregoni se $|abc|=1$ ose $a=-b$ ose $b=-c$ ose $a=-c$.

17. 1) Transformojmë anën e majtë si vijon:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}((n+1)^2-(n-1)^2)$$

$=\frac{n^2}{4}((n+1)-(n-1))((n+1)+(n-1))=\frac{n^2}{4}(2\cdot 2\cdot n)=n^3$, gjë që duhej treguar.

2) Nga identiteti i vërtetuar kemi:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 0}{2}\right)^2=1^3\\[2ex]
\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2-\left(\frac{2\cdot 1}{2}\right)^2=2^3\\[2ex]
\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2-\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2=3^3\\[2ex]
\qquad\qquad\ldots\\
\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2=n^3
\end{array}\right\}\qquad (1)$$

Duke i mbledhur anë për anë relacionet nga (1) merret

$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$, gjë që duhej treguar.

18. Nga $a+b+c+d=0\Rightarrow a=-b-c-d$. D.m.th.

$$(-b-c-d)^3+b^3+c^3+d^3$$

$$=-(b+c)^3-3(b+c)^2d-3(b+c)d^2-d^3+b^3+c^3+d^3$$

$$=-b^3-3b^2c-3bc^2-c^3-3(b+c)^2d-3(b+c)d^2+b^3+c^3$$

$$=-3bc(b+c)-3(b+c)^2d-3(b+c)d^2$$

$$=-3(b+c)(bc+bd+cd+d^2)$$

$$=-3(b+c)(bc+bd+cd+d^2)$$

$$=-3(b+c)(b(c+d)+d(c+d))$$

$=-3(b+c)(b+d)(c+d)$, gjë që duhej treguar.

Detyrë për ushtrime

19. Nëse a,b,c janë numra realë të tillë që $a+b+c=0$, atëherë tregoni se vlen

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^4+b^4+c^4}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.$$

Barazimet dhe mosbarazimet

1. Pasi shprehjet x dhe $x-1$ paraqiten në vlera absolute, ato i barazojmë me zero dhe pastaj caktojmë intevalet në të cilat duhet shqyrtuar detyrën. Pra kemi $x=0$ dhe $x-1=0$. D.m.th. $x=0$ dhe $x=1$. Vërejmë se detyrën duhet shqyrtuar në tri raste:

1) $x\in(-\infty,0]$ 2) $x\in(0,1]$ 3) $x\in(1,\infty)$.

Shqyrtojmë veçmas rastet e mësipërme.

1) Le të jetë $x\in(-\infty,0]$. Atëherë nga përkufizimi i vlerës absolute merret $x\le 0\Rightarrow |x|=-x$, $x-1<0\Rightarrow |x-1|=-(x-1)=1-x$.

Zëvendësojmë në barazimin fillestar dhe marrim

$-x+1-x=1\Rightarrow -2x=0\Rightarrow x=0$.

Meqë 0 i takon intervalit të shyqrtimit ($0\in(-\infty,0]$) atëherë përfundojmë se $x=0$ është zgjidhje e barazimit.

2) Le të jetë $x\in(0,1]$. Atëherë $x>0\Rightarrow |x|=x,\ x-1\le 0\Rightarrow |x-1|=1-x$. Pra kemi $x+1-x=1\Rightarrow 1=1$.

Relacioni $1=1$ është i saktë dhe kjo do të thotë se zgjidhje e barazimit është i tërë gjysmësegmenti $(0,1]$.

3) Le të jetë $x\in(1,\infty)$. Atëherë $x>0\Rightarrow |x|=x,\ x-1>0\Rightarrow |x-1|=x-1$. Merret $x+x-1=1\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$. Por 1 nuk i takon intervalit $(1,\infty)$, d.m.th. në këtë rast barazimi nuk ka zgjidhje.

Nga shyqrtimet në rastet 1) – 3) përfundojmë se zgjidhje e detyrës është çdo $x\in[0,1]$.

Shënim. Nxënësi me të drejtë mund të shtrojë pyetjen: si u caktuan intervalet e shqyrtimit të dhëna me 1) – 3)? A do të kishim mundur që detyrën ta shqyrtonim p.sh. në intervalet vijuese:

i) $x\in(-\infty,0)$ ii) $x\in[0,1]$ iii) $x\in(1,\infty)$?

Çfarë do të ishte rezultati në këtë rast?

Përgjigja është pozitive. Pra, detyra do të mund të shqyrtohej edhe në intervalet i) – iii) dhe rezultati do të jetë i njëjtë.

Ajo çka duhet të kujdesemi gjatë zgjidhjes së barazimeve (mosbarazimeve) me vlera absolute është që të shqyrtojmë të gjitha rastet dhe që intervalet të ndahen në ato pika në të cilat shprehjet nën vlerën absolute bëhen zero (në rastin tonë ishte $x=0, x-1=0$).

Detyra për ushtrime

Të zgjidhen barazimet vijuese

1. $|x-1|+|x-2|=3$.

2. $|x-1|+|x-2|+|x-3|=6$.

3. $|x-n|+|x-2|=9,\ n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

4. $|x-1|+|x-3|=a+2,\ a\in\mathbb{R}$.

5. $|x-a|+|x-3|=5,\ a\in\mathbb{R}$.

6. Le të jetë p numër i thjeshtë së paku treshifror. Të zgjidhet barazimi $|3p-304|=p-100$.

2. Së pari vërejmë se $x^2-x+1=x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, për çdo $x\in\mathbb{R}$. D.m.th. $|x^2-x+1|=x^2-x+1$.

Pasi të zëvendësojmë në barazimin e dhënë merret:

$x^2-x+1+|x-1|=2-x \Leftrightarrow x(x-1)+|x-1|=1-x$

$x(x-1)+|x-1|+(x-1)=0$.

Dallojmë rastet: 1) $x\geq 1$, 2) $x<1$.

1) Nëse $x\geq 1$, kemi $x-1>0 \Rightarrow |x-1|=x-1$. Atëherë merret:

$x(x-1)+(x-1)+(x-1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)+2(x-1)=0$

$(x-1)(x+2)=0 \Rightarrow x=1$ ose $x=-2$.

Por meqë kushti është $x\geq 1$ përfundojmë që zgjidhje është $x=1$.

2) Nëse $x<1$ atëherë $x-1<0 \Rightarrow |x-1|=-(x-1)=1-x$. Merret $x(x-1)+1-x+x-1=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0$ ose $x=1$.

Meqë kushti është $x<1$, merret që $x=0$ është zgjidhje e barazimit.

Përfundojmë se $x=0$ dhe $x=1$ janë zgjidhje të barazimit.

Detyrë për ushtrime

7. Le të jetë a numër realë pozitiv. A ka zgjidhje barazimi $|x^2+x+a|+|x-a|=2-a$?

3. Për $x>0 \Rightarrow |x|=x$. Barazimi i dhënë merr trajtën

$$\frac{x}{|||x+x-1|+x-2|+x-3|}=1, \text{ përkatësisht } \frac{x}{|||2x-1|+x-2|+x-3|}=1.$$

Dallojmë rastet: 1) $x>\frac{1}{2}$ 2) $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

1) Për $x>\frac{1}{2} \Rightarrow 2x-1>0 \Rightarrow |2x-1|=2x-1$. Merret

$$\frac{x}{||2x-1+x-2|+x-3|}=1, \text{ përkatësisht } \frac{x}{||3x-3|+x-3|}=1.$$

Dallojmë rastet: 1') $x>1$ 2') $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

1') Për $x>1$ merret $3x-3>0 \Rightarrow |3x-3|=3x-3$. Merret

$$\frac{x}{|3x-3+x-3|}=1, \text{ përkatësisht } \frac{x}{|4x-6|}=1.$$

Qartë se për $x>\frac{3}{2} \Rightarrow 4x-6>0 \Rightarrow |4x-6|=4x-6$. Merret

$$\frac{x}{4x-6}=1 \Rightarrow x=4x-6 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2.$$

Përfundojmë se $x=2$ është një zgjidhje e barazimit.

Detyrë për ushtrime

8. Të caktohen të gjitha zgjidhjet e barazimit $\frac{x}{||||x|+x-1|+x-2|+x-3|}=1$.

4. Barazimi i dhënë mund të transformohet si vijon

$$\sqrt{x^2+18x+81}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}=3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+9)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=3$$

$$\Leftrightarrow |x+9|+\left|x+\frac{1}{2}\right|=3.$$

Dallojmë rastet: 1) $x\in(-\infty,-9]$, 2) $x\in\left(-9,-\frac{1}{2}\right]$, 3) $x\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$ të cilat do t'i shqyrtojmë veçmas.

1) Le të jetë $x\in(-\infty,-9]$. Atëherë $|x+9|=-x-9,\left|x+\frac{1}{2}\right|=-x-\frac{1}{2}$.

Merret $-x-9-x-\frac{1}{2}=3$ përkatësisht $2x=-\frac{25}{2}\Rightarrow x=-\frac{25}{4}$.

Por $-\frac{25}{4}\notin(-\infty,-9]$. D.m.th. në këtë rast detyra nuk ka zgjidhje.

2) Le të jetë $x\in\left(-9,-\frac{1}{2}\right]$. Atëherë $|x+9|=x+9$, $\left|x+\frac{1}{2}\right|=-x-\frac{1}{2}$.

Merret $x+9-x-\frac{1}{2}=3\Rightarrow\frac{17}{2}=3$ gjë që nuk është e saktë. Pra barazimi nuk ka zgjidhje.

3) Le të jetë $x\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$. Atëherë $|x+9|=x+9$, $\left|x+\frac{1}{2}\right|=x+\frac{1}{2}$.

Merret $x+9+x+\frac{1}{2}=3\Rightarrow 2x=-\frac{13}{2}\Rightarrow x=-\frac{13}{4}$.

Por $-\frac{13}{4}\notin\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$. D.m.th. as në këtë rast detyra nuk ka zgjidhje.

Përfundojmë se barazimi nuk ka zgjidhje.

Detyra për ushtrime

Të zgjidhen barazimet

9. $\sqrt[3]{1-6x+12x^2-8x^3}+\sqrt{x^2-10x+25}=2x-3$.

10. $\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=x^2+7$.

11. $\sqrt{x^2+(x+1)^2+(x^2+x)^2}=5x-3x^2$.

5. Shprehjen $x+8\sqrt{x-4}$ e transformojmë si vijon:

$$x+4\sqrt{x-4}=x-4+2\cdot\sqrt{x-4}\cdot 2+4=(\sqrt{x-4}+2)^2.$$

Ngjashëm merret që $x-4\sqrt{x-4}=(\sqrt{x-4}-2)^2$.

Barazimi i dhënë kalon në trajtën $|\sqrt{x-4}+2|+|\sqrt{x-4}-2|=4$.

Vërejmë se $x\geq 4$. Pse? Atëherë $\sqrt{x-4}+2>0 \Rightarrow |\sqrt{x-4}+2|=\sqrt{x-4}+2$.
Merret $\sqrt{x-4}+2+|\sqrt{x-4}-2|=4$, përkatësisht $\sqrt{x-4}+|\sqrt{x-4}-2|=2$.

Dallojmë rastet: 1) $\sqrt{x-4}\geq 2$, 2) $\sqrt{x-4}<2$.

1) Le të jetë $\sqrt{x-4}\geq 2$. Atëherë $x\geq 8$. Pse?

Në këtë rast $\sqrt{x-4}-2\geq 0 \Rightarrow |\sqrt{x-4}-2|=\sqrt{x-4}-2$.

Pra $\sqrt{x-4}+\sqrt{x-4}-2=2 \Rightarrow 2\sqrt{x-4}=4 \Rightarrow \sqrt{x-4}=2 \Rightarrow x=8$.

Pra $x=8$ është një zgjidhje e barazimit.

2) Le të jetë $\sqrt{x-4}<2$, pra $x<8$. Pse?

Në këtë rast $\sqrt{x-4}-2<0 \Rightarrow |\sqrt{x-4}-2|=2-\sqrt{x-4}$.

Pra $\sqrt{x-4}+2-\sqrt{x-4}=2 \Rightarrow 2=2$.

D.m.th. barazimi ka zgjidhje për çdo $x<8$.

Më sipër cekëm se $x\geq 4$. Nga rastet 1) dhe 2) përfundojmë se $x\in[4,8]$.

Detyrë për ushtrime

12. Të zgjidhet barazimi $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=4$.

6. Transformojmë anën e majtë të barazimit

$$x^4+4x^3-3x^2-14x-8=0 \Leftrightarrow (x^4+4x^3+4x^2)-7x^2-14x-8=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)^2-7(x^2+2x)-8=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+2x)^2+(x^2+2x)-8(x^2+2x)-8=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)(x^2+2x+1)-8(x^2+2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)(x^2+2x-8)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2+4x-2x-8)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2(x(x+4)-2(x+4))=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x+4)(x-2)=0.$$

Tani është e qartë se $x=-1, x=2, x=-4$ janë zgjidhje të barazimit.

Shënim. Për të faktorizuar anën e majtë të barazimit do të mund të mund të shfrytëzonim edhe mënyrën e dytë të aplikuar në detyrën 5 të kapitullit të tretë.

Detyra për ushtrime

Të zgjidhen barazimet

13. $x^5-3x^4+2x^3+x^2-3x+2=0$.

14. $x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$.

7. Barazimin e dhënë e transformojmë si vijon

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+3}\Leftrightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+3-x}{x(x+3)}=\frac{x+7-x-4}{(x+4)(x+7)}\Leftrightarrow\frac{3}{x(x+3)}=\frac{3}{(x+4)(x+7)}$$

Për $x\neq\{0,-3,-4,-7\}$ barazimi i dhënë kalon në trajtën

$$x(x+3)=(x+4)(x+7)\Leftrightarrow x^2+3x=x^2+4x+7x+28$$

$$\Leftrightarrow 8x=-28\Rightarrow x=-\frac{7}{2}.$$

8. Barazimin e transformojmë si vijon

$$x^2+x-5+\sqrt{x^2+x-5}=2.$$

Zëvendësojmë $\sqrt{x^2+x-5}=y$. Atëherë kemi:

$$y^2+y-2=0\Leftrightarrow(y-1)(y+2)=0\Leftrightarrow y=1 \text{ ose } y=-2.$$

Meqë $y\geq 0$ mbetet që $y=1$. Merret

$$\sqrt{x^2+x-5}=1\Rightarrow x^2+x-6=0\Leftrightarrow(x-2)(x+3)=0\Rightarrow x=2 \text{ ose } x=-3$$

janë zgjidhje të barazimit të dhënë.

9. Transformojmë barazimin e dhënë si vijon

$$\frac{1}{x+m+n}+\frac{1}{x+m-n}=\frac{1}{m-n-x}+\frac{1}{m+n-x}$$

$$\frac{1}{x+m+n}-\frac{1}{m+n-x}=\frac{1}{m-n-x}-\frac{1}{x+m-n}$$

$$\frac{1}{(m+n)+x}-\frac{1}{(m+n)-x}=\frac{1}{(m-n)-x}-\frac{1}{(m-n)+x}$$

$$\frac{(m+n)-x-(m+n)-x}{(m+n)^2-x^2}=\frac{(m-n)+x-(m-n)+x}{(m-n)^2-x^2}$$

$$\frac{-2x}{(m+n)^2-x^2}=\frac{2x}{(m-n)^2-x^2}$$

$$\frac{x}{x^2-(m+n)^2}=\frac{x}{(m-n)^2-x^2}\,. \tag{1}$$

Le të diskutojmë barazimin (1).

1) Nëse $m+n=0,\ m-n=0$ përkatësisht nëse $m=0,\ n=0$ kemi

$\frac{x}{x^2}=-\frac{x}{x^2}\Rightarrow 1=-1$, pra në këtë rast barazimi nuk ka zgjidhje.

2) Nëse $m+n\neq 0,\ m-n\neq 0$ barazimi (1) kalon në trajtën

$x\cdot\left(\frac{1}{x^2-(m+n)^2}-\frac{1}{(m-n)^2-x^2}\right)=0$, prej nga merret

$x=0$ ose $\frac{1}{x^2-(m+n)^2}-\frac{1}{(m-n)^2-x^2}=0$.

D.m.th. $\frac{(m-n)^2-x^2-x^2+(m+n)^2}{(x^2-(m+n)^2)((m-n)^2-x^2)}=0\Leftrightarrow x^2=m^2+n^2$.

Por, nëse $x=0$ atëherë $x^2=m^2+n^2$ është i mundur vetëm kur $m=n=0$ e kjo është në kundërshtim me faktin se $m+n\neq 0$, $m-n\neq 0$. Përfundojmë se në këtë rast $x=0$.

3) Nëse $x\neq 0$ atëherë qartë se merret $x^2=m^2+n^2$, por kjo nën supozimin që $x^2\neq(m+n)^2$ dhe $x^2\neq(m-n)^2$, përkatësisht nën kushtin që $m\cdot n\neq 0$. Pse?

Në këtë rast zgjidhjet janë $x=-\sqrt{m^2+n^2}$, $x=\sqrt{m^2+n^2}$.

4) Nëse $m=0, n\neq 0$ ose $m\neq 0, n=0$ atëherë $x=0$. Tregoni.

5) Nëse $m=n\neq 0$ ose $m=-n\neq 0$ atëherë $x=\{-m\sqrt{2}, m\sqrt{2}\}$. Vërtetë, le të themi se $m=n\neq 0$. Nga relacioni (1) merret

$$\frac{x}{x^2-(2m)^2}=\frac{x}{-x^2} \Leftrightarrow x^2-(2m)^2=-x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2=4m^2 \Leftrightarrow x^2=2m^2 \Rightarrow x=\pm m\sqrt{2}\,.$$

Detyrë për ushtrime

15. Le të jenë m,n parametra realë. Të zgjidhet dhe të diskutohet barazimi

$$\frac{m+n}{x-m-n}+\frac{x+m+n}{m-n}=0\,.$$

10. Së pari është e qartë se numrat x,y janë njëkohësisht çift ose tek. Pse? Le të shqyrtojmë ndaras rastet:

1) Numrat x,y janë numra tek. D.m.th. $x=2k+1, y=2l+1$, ku $k,l\in\mathbb{N}$. Atëherë $x^2+y^2=(2k+1)^2+(2l+1)^2=2004$

$\Leftrightarrow 4k^2+4k+1+4l^2+4l+1=2004 \Leftrightarrow 4(k^2+k+l^2+l)=2002$

$\Leftrightarrow 2(k^2+k^2+l^2+l)=1001$, gjë që nuk është e mundur sepse në anën e majtë kemi numër çift e në anën e djathtë numër tek.

2) Le të jenë x,y numra çift. D.m.th. $x=2k, y=2l,\ k,l\in\mathbb{N}$. Atëherë $x^2+y^2=4k^2+4l^2=2004 \Rightarrow k^2+l^2=501$. Meqë në anën e djathtë kemi numër tek mbetet që njëri nga numrat k,l të jetë çift e tjetri tek. P.sh. le të jetë k numër çift kurse l numër tek. Atëherë ata mund të paraqiten në trajtat $k=2k_1,\ l=2l_1+1$, ku $k_1,l_1\in\mathbb{N}$.

Atëherë $k^2+l^2=(2k_1)^2+(2l_1+1)^2=501$.

D.m.th. $4k_1^2+4l_1^2+4l_1+1=501 \Leftrightarrow 4(k_1^2+l_1^2+l_1)=500$

$$\Leftrightarrow k_1^2+l_1^2+l_1=125\,. \qquad (1)$$

Vërejmë se $l_1\in\{1,2,...,10\}$. Pse?

Provojmë p.sh. për $l_1=10$. Kemi $k_1^2+100+10=125 \Rightarrow k_1^2=15$ por ky barazim nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave natyror.

Nëse $l_1=9$ atëherë $k_1^2+81+9=125 \Rightarrow k_1^2=35$. Edhe në këtë rast barazimi nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave natyror.

Nxënësi lehtë mund të tregojë se as në rastet $l\in\{1,2,...,8\}$ barazimi nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave natyror sipas ndryshores k.

Përfundojmë se nuk ekzistojnë numrat natyror k_1, l_1 për të cilët vlen relacioni (1).

Nga shqyrtimet e bëra në rastet 1) dhe 2) përfundojmë se barazimi $x^2 + y^2 = 2004$ nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave natyror.

Detyra për ushtrime

16. Të zgjidhet në bashkësinë e numrave natyror barazimi $x^2 + y^2 = 2005$.

17. Le të jenë $x, y \in \mathbb{N}$. Të zgjidhet barazimi $x^2 + 2y^2 = 1200$.

18. Të zgjidhet barazimi $3x^2 + y^2 = 171$, ku $x, y \in \mathbb{N}$.

11. Barazimin $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = \sqrt{800}$ e shkruajmë si vijon $\sqrt{x+1} = \sqrt{800} - \sqrt{y+2}$.

Pasi t'i ngrisim në katror të dy anët merret

$x+1 = 800 + y + 2 - 40\sqrt{2(y+2)}$ përkatësisht

$$x = 801 + y - 40\sqrt{2(y+2)}. \tag{1}$$

Meqë x është numër natyror atëherë duhet që $\sqrt{2(y+2)}$ të jetë numër natyror, përkatësisht që $2(y+2)$ të jetë katror i plotë. Kjo është e mundur nëse $y + 2 = 2n^2$. (2)

Tani barazimin e dhënë e shkruajmë si vijon $\sqrt{y+2} = \sqrt{800} - \sqrt{x+1}$.

Pasi t'i ngrisim në katror dhe pas rregullimit merret

$$y = 799 + x - 40\sqrt{2(x+1)} \tag{3}$$

Nën të njëjtat arsyetime merret që $x + 1 = 2m^2$. (4)

Nga (2) dhe (4) merret

$$y = 2n^2 - 2 \tag{5}$$

$$x = 2m^2 - 1 \tag{6}$$

Kur këto relacione i zëvendësojmë në (1) dhe (3) merret:

$$\left.\begin{array}{l} 2m^2 - 1 = 801 + 2n^2 - 2 - 80n \\ 2n^2 - 2 = 799 + 2m^2 - 1 - 80m \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} 2m^2 - 2n^2 + 80n = 800 \\ 2n^2 - 2m^2 + 80m = 800 \end{array}\right\} \tag{7}$$

Nga sistemi (7) merret:

$2m^2-2n^2+80n=2n^2-2m^2+80m \Leftrightarrow 4(m^2-n^2)+80(n-m)=0$

$\Leftrightarrow (m-n)(m+n)-20(m-n)=0 \Leftrightarrow (m-n)(m+n-20)=0$

$\Rightarrow m=n$ ose $m+n=20$.

Për $m=n$ merret $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{2} \Rightarrow x+1=y+2$.

Zëvendësojmë në barazimin fillestar dhe merret:

$\sqrt{y+2}+\sqrt{y+2}=\sqrt{800} \Leftrightarrow 2\sqrt{y+2}=2\sqrt{200} \Rightarrow y=198, x=199$.

Pra $(199,198)$ është një zgjidhje e detyrës.

Zgjidhjet tjera merren nga kushti $m+n=20$, ku $x+1=2m^2, y+2=2n^2$.

P.sh. $m=15, n=5$, $x+1=2\cdot 225,\ y+2=2\cdot 5^2 \Rightarrow x=449, y=48$.

Nxënësi e ka të lehtë të caktojë dyshet tjera.

Detyra për ushtrime

19. Të zgjidhet në bashkësinë e numrave natyror barazimi $\sqrt{x}+\sqrt{y+1}=2004$.

20. Le të jenë $x, y \in \mathbb{Q}$. Të zgjidhet barazimi $3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=15$.

12. *Shënim*. Mënyra se si është zgjidhur detyra 7 e kapitullit të parë mund të zbatohet për të zgjidhur barazimin e dhënë. Kësaj radhe do të përdorim një mënyrë tjetër të zgjidhjes.

Supozojmë se $x \le y$. Le të shënojmë me S shumën në anën e majtë të barazimit, pra $S=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

Nëse $x \le 6$ atëherë $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{6}$. Meqë y është numër natyror atëherë $\frac{1}{y}>0$, kështu që merret $S=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{6}$. Pra, për $x \le 6$ barazimi nuk ka zgjidhje.

Nëse $x \ge 13$ atëherë $\frac{1}{x} \le \frac{1}{13}$. Meqë $x \le y$ mund të shkruajmë $13 \le y$ prej nga $\frac{1}{y} \le \frac{1}{13}$. D.m.th. $S=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le \frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{2}{13}<\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$. Pra edhe nëse $x \ge 13$ barazimi nuk ka zgjidhje.

Mbetet shqyrtuar rastet kur $x \in \{7,8,9,10,11,12\}$.

Për $x = 7$, $\frac{1}{7} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{7-6}{42} = \frac{1}{42} \Rightarrow y = 42$.

Nxënësi e ka lehtë të provojë rezultatet vijuese:

Për $x = 8$ merret $y = 24$.

Për $x = 9$ merret $y = 18$.

Për $x = 10$ merret $y = 15$.

Për $x = 11$ merret $y = \frac{5}{66}$. Në këtë rast y nuk është numër natyror e as zgjidhje e barazimit.

Për $x = 12$ merret $y = 12$.

Zgjidhjet e barazimit janë dyshet $\{(8,24),(9,18),(10,15),(12,12)\}$.

Detyrë për ushtrime

21. Të zgjidhet barazimi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$, ku $x, y, z \in \mathbb{N}$.

13. Transformojmë barazimin e dhënë

$$x^2 - y^2 = 4y + 12 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 4y - 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 - (y+2)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 2)(x + y + 2) = 8.$$

Në vijim tregojmë se $x - y - 2, x + y + 2$ janë njëkohësisht çift ose tek.

1) Le të jenë x, y numra çift. Pra $x = 2k, y = 2l, (k, l \in \mathbb{Z})$. Atëherë

$$x - y - 2 = 2k - 2l - 2 = 2(k - l - 1)$$

$$x + y + 2 = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1).$$

Pra numrat $x - y - 2$ dhe $x + y + 2$ janë çift.

2) Le të jenë x, y numra tek. Pra $x = 2k + 1, y = 2l + 1, (k, l \in \mathbb{Z})$. Atëherë

$$x - y - 2 = 2k + 1 - (2l + 1) - 2 = 2k + 1 - 2l - 1 - 2 = 2(k + l - 1)$$

$$x + y + 2 = 2k + 1 + 2l + 1 + 2 = 2k + 2l + 4 = 2(k + l + 2)$$

Pra numrat $x - y - 2$ dhe $x + y + 2$ janë çift.

3) Le të jetë x numër çift, kurse y numër tek. Pra $x=2k$, $y=2l+1$, $(k,l\in\mathbb{Z})$. Atëherë

$$x-y-2=2k+2l+1-2=2(k+l)-1$$

$$x+y+2=2k+2l+1+2=2(k+l+1)+1.$$

Në këtë rast numrat $x-y-2$, $x+y+2$ janë tek.

Ngjashëm tregohet nëse x është numër tek, kurse y numër çift.

Meqë 8 nuk mund të shkruhet si prodhim i numrave tek mbetet që $x-y-2$, $x+y+2$ të jenë numra çift. Pra kemi mundësitë vijuese:

1) $\begin{cases} x-y-2=2 \\ x+y+2=4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y-2=4 \\ x+y+2=2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y-2=-2 \\ x+y+2=-4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y-2=-4 \\ x+y+2=-2 \end{cases}$

Pas zgjidhjes së sistemeve 1) - 4) merret që zgjidhje janë:

$(3,-1),(3,-3),(-3,-3),(-3,-1)$.

Detyrë për ushtrime

22. Të zgjidhet në bashkësinë e numrave të plotë barazimi $x^3-y^3=19$.

14. Nën të njëjtat arsyetime si tek barazimet me vlera absolute edhe në këtë detyrë dallojmë rastet: 1) $x\geq 1$, 2) $x<1$.

1) Nëse $x\geq 1$ atëherë $x-1\geq 0 \Rightarrow |x-1|=x-1$.

Merret $x-1<2x-4 \Leftrightarrow -x<-3 \Leftrightarrow x>3$.

Nga $x\geq 1$ dhe $x>3$ merret $x>3$.

Në këtë rast zgjidhje është çdo x që i takon intervalit $(3,\infty)$.

2) Nëse $x<1$ atëherë $x-1<0 \Rightarrow |x-1|=1-x$.

Merret $1-x<2x-4 \Leftrightarrow -3x<-5 \Leftrightarrow x>\frac{5}{3}$.

Nga $x<1$ dhe $x>\frac{5}{3}$ përfundojmë se në këtë rast detyra nuk ka zgjidhje.

Nga rastet 1) dhe 2) përfundojmë se $x\in(3,\infty)$.

Detyra për ushtrime

Të zgjidhen mosbarazimet

23. $|x-2|<3x+4$.

24. $\dfrac{|2-x|}{x-1}>\dfrac{1}{2}$.

25. $\dfrac{2004}{|x+1|+|x-1|}>\dfrac{3}{4}$.

26. $|x|+2004>204x$.

15. Së pari nxënësi e ka të qartë se vlen $|2x+1|^2=(2x+1)^2$, $|x+3|^2=(x+3)^2$.

Atëherë mosbarazimi transformohet si vijon:

$$|x+1|+(2x+1)^2+(2x+1)\le(x+3)^2-4$$

$$|x+1|+4x^2+4x+1+2x+1\le x^2+6x+9-4$$

$$|x+1|+3x^2-3\le 0$$

$$|x+1|+3(x^2-1)(x^2+1)\le 0 \qquad (1)$$

Dallojmë rastet: 1) $x\ge -1$, 2) $x<-1$.

1) Nëse $x\ge -1$ atëherë $|x+1|=x+1$. Merret

$$(x+1)+3(x-1)(x+1)\le 0 \Leftrightarrow (x+1)(1+3(x-1))\le 0 \Leftrightarrow (x+1)(3x-2)\le 0$$

Relacioni i mësipërm është i saktë në rastet vijuese:

I) $\begin{cases} x+1\le 0 \\ 3x-2\ge 0 \end{cases}$ ose II) $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 3x-2\le 0 \end{cases}$.

Nga sistemi I) kemi $x\le -1$ dhe $x\ge\dfrac{2}{3}$. Është e qartë se në këtë rast mosbarazimi nuk ka zgjidhje.

Nga sistemi II) kemi $x\ge -1$ dhe $x\le\dfrac{2}{3}$. Pra $x\in\left[-1,\dfrac{2}{3}\right]$.

2) Nëse $x<-1$, atëherë $|x+1|=-(x+1)$. Mosbarazimi (1) kalon në trajtën $-(x+1)+3(x-1)(x+1)\le 0 \Leftrightarrow (x+1)(3x-4)\le 0$.

Relacioni i fundit është i saktë në rastet vijuese:

I) $\begin{cases} x+1\le 0 \\ 3x-4\ge 0 \end{cases}$ ose $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 3x-4\le 0 \end{cases}$.

Pasi t'i zgjidhim sistemet e mësipërme merret $x \in \left[-1, \frac{4}{3}\right]$. Por kushti fillestar është $x < -1$. D.m.th. në këtë rast mosbarazimi nuk ka zgjidhje.

Nga rastet 1) dhe 2) përfundojmë se $x \in \left[-1, \frac{2}{3}\right]$.

Detyrë për ushtrime

27. Të zgjidhet mosbarazimi $|x-3|+|x^2+x+1|>7+2x$.

16. Më parë kemi treguar se nëse $a,b>0$ atëherë $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Ngjashëm merret $\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}$, $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$. Atëherë kemi:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, a+c \geq 2\sqrt{ac}, b+c \geq 2\sqrt{bc}. \qquad (1)$$

Nga kushti i detyrës kemi

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=1 \Rightarrow a+b=1-c \\ a+b+c=1 \Rightarrow a+c=1-b \\ a+b+c=1 \Rightarrow b+c=1-a \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Nga (1) dhe (2)

$$\left.\begin{array}{l} (1-c) \geq 2\sqrt{ab} \\ (1-c) \geq 2\sqrt{ac} \\ (1-a) \geq 2\sqrt{bc} \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Duke shumëzuar anë për anë relacionet në (3) merret

$(1-c)(1-b)(1-a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$, përkatësisht $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc$, gjë që duhej treguar.

Detyrë për ushtrime

28. Nëse a,b,c janë numra realë pozitiv të tillë që $abc=1$, tregoni se vlen mosbarazia $(1+a)\cdot(1+b)\cdot(1+c) \geq 8$.

17. Është e qartë se

$$\begin{cases} 4a+1\le 4a^2+4a+1 \Leftrightarrow (4a+1)\le(2a+1)^2 \Rightarrow \sqrt{4a+1}\le|2a+1| \\ 4b+1\le 4b^2+4b+1 \Leftrightarrow (4b+1)\le(2b+1)^2 \Rightarrow \sqrt{4b+1}\le|2b+1| \\ 4c+1\le 4c^2+4c+1 \Leftrightarrow (4c+1)\le(2c+1)^2 \Rightarrow \sqrt{4c+1}\le|2c+1| \end{cases} \qquad (1)$$

Nga relacioni (1) merret

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\le|2a+1|+|2b+1|+|2c+1| \qquad (2)$$

Meqë $a\ge-\frac{1}{4},\ b\ge-\frac{1}{4},\ c\ge-\frac{1}{4}$ merret $2a+1>0,\ 2b+1>0,\ 2c+1>0$.
Nga (1) kemi

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\le 2a+1+2b+1+2c+1=2(a+b+c)+3=5,$$

gjë që duhej treguar.

18. Le të jetë $S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$. Meqë $n+1<n+n\Rightarrow\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n+n}$

Ngjashëm merret $\frac{1}{n+2}>\frac{1}{n+n}$ e kështu me radhë. Atëherë kemi

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+...+\frac{1}{n+n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Nxënësi e ka të lehtë të arsyetojë se

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n+1}=n\cdot\frac{1}{n+1}<\frac{n+1}{n+1}=1$$

D.m.th. $\frac{1}{2}<S_n<1$, gjë që duhej treguar.

19. Përkujtojmë se $\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n\cdot n}<\frac{1}{n(n-1)}$. Pse? Në anën tjetër

$\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$. Pse? D.m.th. $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$.

Pra

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \\ \quad \ldots \\ \frac{1}{2004^2} < \frac{1}{2003} - \frac{1}{2004} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Duke i mbledhur anë për anë mosbarazitë në (1) merret

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{2004^2} < 1 - \frac{1}{2004}.$$

Të dy anëve të mosbarazisë së fundit ua shtojmë numrin 1. Merret

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{2004^2} < 2 - \frac{1}{2004} < 2$, gjë që duhej treguar.

20. Le të shqyrtojmë të mbledhëshmin e parë

$$\frac{a}{\sqrt{(a+c)(a+b)}} = \sqrt{\frac{a^2}{(a+c)(a+b)}} = \sqrt{\frac{a}{a+c} \cdot \frac{a}{a+b}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c} + \frac{a}{a+b}\right).$$

Ngjashëm merret

$$\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a} + \frac{b}{b+c}\right), \quad \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b}\right).$$

Atëherë $\frac{a}{\sqrt{(a+c)(a+b)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c}\right)$$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{a+c} + \frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c}\right) = \frac{3}{2}$, gjë që duhej treguar.

21. Meqë a, b, c janë gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit vlejnë mosbarazitë $|b-c| < a, |c-a| < b, |a-b| < c$. Pse?

Ana e majtë e mosbarazisë transformohet si vijon:

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+\frac{b}{c}-\frac{c}{b}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right|=\left|\frac{a^2-b^2}{ab}+\frac{b^2-c^2}{bc}+\frac{c^2-a^2}{ac}\right|$$

$$=\left|\frac{c(a^2-b^2)+a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)}{abc}\right|=\left|\frac{a^2c-b^2c+ab^2-ac^2+bc^2-ba^2}{abc}\right|$$

$$=\left|\frac{ac(a-c)+bc(c-b)+ab(b-a)}{abc}\right|$$

$$=\left|\frac{ac(a-b+b-c)+bc(c-b)+ab(b-a)}{abc}\right|$$

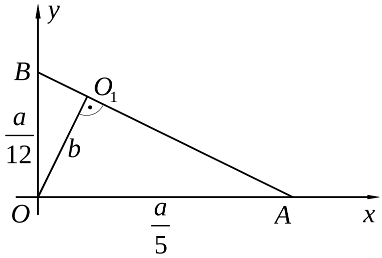
$$=\left|\frac{ac(a-b)+ac(b-c)+bc(c-b)-ab(a-b)}{abc}\right|$$

$$=\left|\frac{(a-b)(ac-ab)+(b-c)(ac-bc)}{abc}\right|=\left|\frac{(a-b)a(c-b)+(b-c)c(a-b)}{abc}\right|$$

$\left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right|=\frac{|a-b|\cdot|b-c|\cdot|c-a|}{abc}<1$, gjë që duhej treguar.

Barazimet lineare me dy ndryshore

1. Për $x=0$ meret $y=\frac{a}{12}$. Për $y=0$ merret $x=\frac{a}{5}$. Pra, drejtëza kalon nëpër pikat $A\left(\frac{a}{5},0\right)$ dhe $B\left(0,\frac{a}{12}\right)$ (shih figurën).



D.m.th. $OA=\frac{a}{5}$, $OB=\frac{a}{12}$. Duke zbatuar *teoremën e Pitagorës* në trekëndëshin AOB kemi $AB^2=\frac{a^2}{25}+\frac{a^2}{144}$ prej nga merret $AB=\frac{13a}{60}$.

Le të jetë O_1 pikë në *AB* ashtu që OO_1 të jetë normal në *AB*. Sipas kushtit të detyrës kemi $OO_1=b$.

Nga formula për njehsimin e syprinës së sipërfaqes së trekëndëshit dhe meqë $S=\frac{13}{6}$ merret $\frac{13}{6}=\frac{1}{2}AB\cdot b$ përkatësisht $\frac{13}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{60}ab$ prej nga $ab=20$.

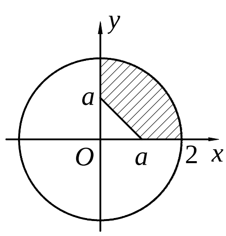
Meqë $a,b\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ merren rastet e mundshme:

1) $a=2, b=10$; 2) $a=4, b=5$; 3) $a=10, b=2$; 4) $a=5, b=4$.

Në të gjitha rastet vërejmë se njëri nga numrat *a*, *b* është i thjeshtë, gjë që duhej treguar.

Detyra për ushtrime

1. Është dhënë rrethi me qendër në origjinë të sistemit koordinativ dhe me rreze $r=2\,\text{cm}$. Të caktohet parametri *a*, $a>0$ në barazimin e drejtëzës $x+y=a$, ashtu që syprina e sipërfaqes së hijëzuar në figurë të jetë e barabartë me $\pi-\frac{1}{8}$.



2. Është dhënë drejtëza me barazimin $3x+4y=a, a\in\mathbb{R}$. Largesa normale l e drejtëzës nga origjina e sistemit koordinativ është dy herë më e vogël se hipotenuza. Nëse syprina e sipërfaqes së trekëndëshit është $S=100$, të caktohen a dhe l.

2. Supozojmë të kundërtën, pra se ekziston drejtëza me barazimin $ax+by=12$ me vetitë e përshkruara në detyrë.

Për $x=0$ merret $y=\frac{12}{a}$. Për $y=0$ merret $x=\frac{12}{a}$. Pra, drejtëza kalon nëpër pikat $A\left(\frac{12}{a},0\right), B\left(0,\frac{12}{b}\right)$.

Ngjashëm si në detyrën e parë merret $AB=\frac{12}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$.

Meqë $S=12, OO_1=2$ dhe nga fakti $S=\frac{1}{2}AB\cdot OO_1$ merret $12=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{ab}\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2$, përkatësisht $ab=\sqrt{a^2+b^2}$.

Duke ngritur në katror të dy anët e relacionit të fundit merret $a^2b^2=a^2+b^2$ prej nga $a^2(b^2-1)=b^2$.

Pra $b^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2=1$. (1)

Është e qartë se $\frac{b}{a}$ duhet të jetë numër i plotë. Pse?

Le të themi se $\frac{b}{a}=x, x\in\mathbb{Z}$. Pra $b=ax$. D.m.th. relacioni (1) kalon në trajtën $(b-x)(b+x)=1$ prej nga merret $b-x=1$ dhe $b+x=1$.

Qartë se $b=1$ dhe $x=0$, por $x=0$ është në kundërshtim me faktin se $\frac{1}{a}=0$. Përfundojmë se supozimi ynë qenka i gabuar.

3. Meqë $3x+11y=109$ kemi

$$3x=108-11y+1 \Leftrightarrow 3x=108-12y+y+1 \Rightarrow x=36-4y+\frac{y+1}{3}.$$

Meqë x është numër i plotë duhet që $y+1$ të plotpjesëtohet me 3, pra $y+1=3k$, për $k\in\mathbb{Z}$. Kemi $y=3k-1$ prej nga $x=36-4(3k-1)+4$ $\Rightarrow x=40-11k$.

Meqë pikat (x, y) duhet t'i takojnë kuadrantit të parë atëherë x dhe y duhet të jenë numra natyror, d.m.th. $40-11k>0$ dhe $3k-1>0$. Nga mosbarazimi i parë merret $k \le 3$, kurse nga mosbarazimi i dytë merret $k \ge 1$. Pra $k \in \{1,2,3\}$.

Për $k=1$ merret $x=29,\ y=2$.

Për $k=2$ merret $x=18,\ y=5$.

Për $k=3$ merret $x=7,\ y=8$.

Detyrë për ushtrime

3. Në sistemin koordinativ kënddrejtë është dhënë drejtëza me barazimin $3x+11y=2004$. Sa pika në drejtëzën e dhënë i kanë koordinatatat numra natyror?

4. Transformojmë barazimin e drejtëzës së dhënë. Merret

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{13}{4} \Leftrightarrow 4y=-2x+13 \Leftrightarrow 2x+4y=13.$$

Ngjashëm si në detyrën e mësipërme merret

$$2x=12-4y+1 \Rightarrow x=6-\frac{4y+1}{2}.$$

Sikur të dy koordinatat të ishin numra të plotë atëherë do të duhej që numri $4y+1$ të plotpjesëtohej me 2, d.m.th. $4y+1=2k, k \in \mathbb{Z}$. Pra $4y=2k-1$ $\Rightarrow y=2k-1$.

Në këtë rast është e qartë se koordinata y nuk mund të jetë numër i plotë sepse numri $2k-1$ është numër tek për çdo $k \in \mathbb{Z}$ dhe si i tillë nuk plotpjesëtohet me 4.

5. Së pari barazimet e dhëna do t'i paraqesim në trajtë tjetër:

$$3y_1=(x+1)m+x \Rightarrow 3y_1=xm+m+x \Rightarrow y_1=\frac{m+1}{3}x+\frac{m}{3}.$$

Pra, barazimi i drejtëzës së parë është

$$d_1:\ y_1=\frac{m+1}{3}x+\frac{m}{3}.$$

Ngjashëm merret që barazimi i drejtëzës së dytë është

$$d_2:\ y_2=\frac{1}{m-1}x+4.$$

Përkujtojmë se dy drejtëza janë paralele nëse koeficientët e pjerrtësisë së tyre janë të barabartë.

Pra që d_1 të jetë paralele me d_2 duhet që $\frac{m+1}{3}=\frac{1}{m-1}$, prej nga merret $m_1=2$ dhe $m_2=-2$.

Detyrë për ushtrime

4. Të caktohen vlerat e parametrit realë *m*, ashtu që drejtëzat e dhëna me barazimet $d_1: 8y+3(m-1)x=14m$, $d_2: 14m(m+1)y-mx=3(m+1)$ të jenë paralele.

6. Përkujtojmë se funksioni linear $y=mx+n$ është rritës nëse $m>0$, ndërsa është zvogëlues nëse $m<0$.

Pra, fillimisht duhet që shprehjen e dhënë ta shndërrojmë në trajtën $y=mx+n$. Kemi

$$x+y=nx+ny-4n+4-6x \Rightarrow y-ny=nx-x-6x-4(n-1)$$

$$\Rightarrow y(1-n)=x(n-7)+4(1-n) \Rightarrow y=\frac{n-7}{1-n}x+4.$$

Pra, që funksioni të jetë rritës duhet që $\frac{n-7}{1-n}>0$.

Zgjidhja e mosbarazimit të fundit është $n\in(1,7)$.

Detyrë për ushtrime

5. Të caktohen të gjitha vlerat *n* për të cilat funksioni linear

$$n(x+y)=2(x+y)+3y+n-5$$

është zbritës.

7. Së pari funksionin e dhënë e transfomojmë si vijon:

$$\frac{y}{n}-1=(n+2)x \Leftrightarrow y=n(n+2)x+n.$$

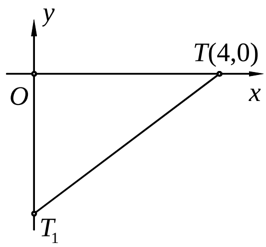
Tregojmë se për çdo numër të plotë *n* të ndryshëm nga $0,-1,-2$ koeficienti i pjerrtësisë $n(n+2)$ është pozitiv.

Vërtetë $n(n+2)=n^2+2n+1-1=(n+1)^2-1$. Qartë se nëse $n\neq\{0,-1,-2\}$ atëherë $(n+1)^2-1>0$, gjë që duhej treguar.

Detyrë për ushtrime

6. Të vërtetohet se për çdo *n* numër të plotë të ndryshëm nga $0,-1$ funksioni linear $y+n(n+1)x-n=0$ është zbritës.

8. Le t'i referohemi grafikut. Qartë se $OT = 4\text{cm}$. Le të jetë $OT_1 = y, TT_1 = z$. Atëherë $12 = OT + OT_1 + TT_1$.



D.m.th. $12 = 4 + y + z \Rightarrow y + z = 8$.

Meqë *y*, *z* janë gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit dhe meqë *y* është numër i plotë (sepse koordinata e pikës T_1 janë numra të plotë, si dhe meqë trekëndëshi OTT_1 është kënddrejtë kemi rastet e mundshme $y = 1,\ z = 7$; $y = 2,\ z = 6$ dhe $y = 3,\ z = 5$. Pse nuk kemi raste të tjera? Pse p.sh. nuk mund të marrim $y = 4,\ z = 4$?

Por nga rastet e mundshme vetëm rasti $y = 3,\ z = 5$ e plotëson teo*remën e Pitagorës* $(4^2 + 3^2 = 5^2)(4^2 + 1^2 \neq 7^2, 4^2 + 2^2 \neq 6^2)$.

Mbetet që $T_1 = (0, -3)$. D.m.th. drejtëza $y = mx + n$ kalon nëpër pikën $T(4,0)$ dhe $T_1(0,-3)$. Kemi sistemin

$$0 = 4m + n \Rightarrow m = -\frac{n}{4} \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

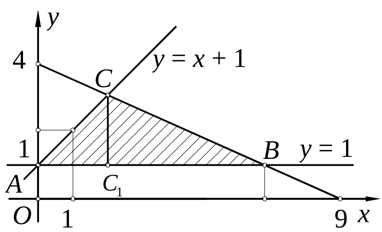
$$-3 = n \Rightarrow n = -3.$$

Drejtëza e dhënë ka barazimin $y = \frac{3}{4}x - 3$.

Detyrë për ushtrime

7. Drejtëza $y = mx + n$ kalon nëpër pikën $T(4,0)$, nuk kalon në kuadrantin e dytë dhe me boshetet koordinative formon trekëndësh me syprinë 60. Të caktohet barazimi i drejtëzës.

9. Së pari paraqesim grafikisht drejtëzat e dhëna. Le të caktojmë koordinatat e pikave *A*, *B* dhe *C*.



Qartë se pika *A* ka koordinatat $A(0,1)$, Pse?

Pika *B* është pikëprerja e drejtëzave $y = 1$ dhe $\frac{x}{9} + \frac{y}{4} = 1$, d.m.th. koordinatat e saj i caktojmë nga zgjidhja e sistemit

$$\begin{cases} y = 1 \\ \dfrac{x}{9} + \dfrac{y}{4} = 1 \end{cases}.$$

Lexuesi e ka të lehtë të tregojë se zgjidhja është $x = \dfrac{27}{4},\ y = 1$.

Pra $B\left(\dfrac{27}{4}, 1\right)$.

Pika C është pikëprerja e drejtëzave $y = x + 1$ dhe $\dfrac{x}{9} + \dfrac{y}{4} = 1$, d.m.th. koordinatat e saj merren nga zgjidhja e sistemit:

$\begin{cases} y = x + 1 \\ \dfrac{x}{9} + \dfrac{y}{4} = 1 \end{cases}$. Tregohet se zgjidhja është $x = \dfrac{27}{13},\ y = \dfrac{40}{13}$.

Pra $C\left(\dfrac{27}{13}, \dfrac{40}{13}\right)$.

Le të njehsojmë syprinën e trekëndëshit ABC.

Le të jetë C_1 pikë në AB ashtu që $CC_1 \perp AB$. Pra CC_1 është lartësia e trekëndëshit ABC e ndërtuar nga kulmi C.

Atëherë $S = \dfrac{1}{2} AB \cdot CC_1$.

Qartë se $AB = \dfrac{27}{4}$, kurse $CC_1 = \dfrac{40}{13} - 1 = \dfrac{27}{13}$. Pse?

Përfundimisht $S = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{27}{4} \cdot \dfrac{27}{13} = \dfrac{769}{104}$.

Detyra për ushtrime

8. Janë dhënë drejtëzat me barazimet $y = x + \dfrac{1}{2},\ \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{6} = 1,\ 2y = 1 - \dfrac{x}{5}$. Të njehsohet syprina dhe perimetri i trekëndëshit që formojnë drejtëzat.

9. Janë dhënë drejtëzat me barazimet $x = 1,\ y = 2,\ \dfrac{y}{4} + \dfrac{x}{3} = 1$. Të njehsohet syprina dhe perimetri i trekëndëshit që formojnë drejtëzat.

10. Së pari është e qartë se $f(x^2 + 1) = x^2 + 1 + 1 = x^2 + 2$.

a) Atëherë $f(f(x^2 + 1) = f(x^2 + 2) = x^2 + 2 + 1 = x^2 + 3$.

Kemi $x+1+x^2+3=x^2+8 \Rightarrow x=-4$.

b) Meqë $f^2(x)=(x+1)^2$ dhe meqë për $x=-4$ merret që $f^2(x)=(-4+1)^2=9$, përfundojmë se $(x, f^2(x))=(-4,9)$.

c). Nga rasti b) pamë se $(x, f^2(x))=(-4,9)$. Në anë tjetër drejtëza $\dfrac{y-2}{x-2}=1$ transformohet në $y=x$. Pra koeficienti i pjerrtësisë është 1.

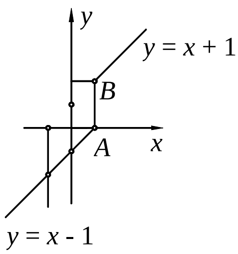
Le të jetë drejtëza e kërkuar $y=mx+n$. Qartë se $m=1$. Pra $y=x+n$. Meqë drejtëza kalon nëpër pikën $(-4,9)$, koordinatat e saj e plotësojnë barazimin e drejtëzës. Kemi

$$9=-4+n \Rightarrow n=13.$$

Përfundojmë se barazimi i drejtëzës së kërkuar është

$$y=x+13.$$

11. a) Nëse $x>1 \Rightarrow |x-1|=x-1$. Në këtë rast kemi



$$y=x+\frac{x-1}{x-1}=x+1.$$

Nëse $x \le 1 \Rightarrow |x-1|=1-x$. Në këtë rast kemi

$$y=x+\frac{1-x}{x-1}=x-1.$$

b) Nga $y=x+\dfrac{|x-1|}{x-1}$ vërejmë se funksioni i dhënë nuk është i përkufizuar në pikën $x=1$. Prandaj pikat $A(1,0)$ dhe $B(1,2)$ nuk i takojnë garfikut të funksionit.

Detyra për ushtrime

Të paraqiten grafikisht funksionet

10. $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{|x-2|}\cdot(x-2)$. 11. $y=\dfrac{|x-1|}{2}+\dfrac{|x-2|}{2}+|x|$.

12. Meqë $x^2-4x+4=(x-2)^2$ dhe $x^2-2x+1=(x-1)^2$ kemi

$$y=|x-2|+|x-1|.$$

Dallojmë rastet: 1) $x<1$; 2) $x\in[1,2)$; 3) $x \ge 2$, të cilat do t'i shqyrtojmë ndaras.

1) Nëse $x<1 \Rightarrow |x-1|=1-x;\ x-2<0 \Rightarrow |x-2|=2-x$

$$y=2-x+1-x \Rightarrow y=3-2x.$$

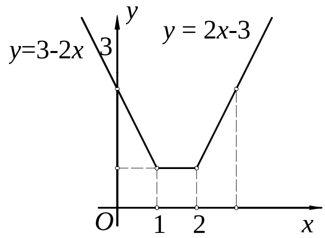
2) Nëse $x \in [1,2) \Rightarrow x-1>0$. Pra $|x-1|=x-1$,

$x-2<0 \Rightarrow |x-2|=2-x$.

Atëherë $y=2-x+x-1 \Rightarrow y=1$.

3) Nëse $x \geq 2 \Rightarrow |x-1|=x-1,\ |x-2|=x-2$.

Pra $y=x-1+x-2=2x-3$.



Detyra për ushtrime

Të paraqiten grafikisht funksionet

12. $y=|x|+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$. **13.** $y=|x-1|+\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}$.

14. $y=\frac{|x-1|+x}{3}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}$.

13. Vërejmë se $f(2x+3)=m(2x+3)+n=2mx+3m+n$

$$f(3x+2)=m(3x+2)+n=3mx+2m+n\ .$$

Atëherë $f(2x+3)+f(3x+2)=5mx+5m+2n$.

Në anën tjetër $f(2x+3+3x+2)=f(5x+5)=m(5x+5)+n$

$$=5mx+5m+n\ .$$

Meqë duhej të vlejë $f(2x+3)+f(3x+2)=f((2x+3)+(3x+2)$ kemi

$$5mx+5m+2n=5mx+5m+n \Rightarrow n=0\ .$$

Pra, të gjitha funksionet $f(x)=mx$ e plotësojnë kushtin e detyrës.

Detyra për ushtrime

15. Të caktohen të gjitha funksionet $f(x)=mx+n$ të tilla që

$$f(2x+1)\cdot f(2x-1)=f(2x+1)+f(2x-1)\ .$$

14. Funksioni i dhënë do të jetë rritës nëse $2k+5>0 \Rightarrow k>-\frac{5}{2}$.

Që funksioni të jetë rritës dhe që grafiku i tij të pret boshtin y nën origjinën e sistemit koordinativ duhet që $x>0$. Pse? D.m.th. kemi $y<0,\ x>0$.

Merret $(2k+5)x+k-5<0 \Rightarrow x<\frac{5-k}{2k+5}$. Meqë $x>0$ mbetet që $\frac{5-k}{2k+5}>0$. Meqë $2k+5>0$ mbetet që $5-k=0 \Rightarrow k<5$. Pra $k \in \left(-\frac{5}{2},5\right)$.

Sistemet e barazimeve

1. Mbledhim anë për anë barazimet e sistemit

$$(x+y+z)(x+y+z+x+z)=800$$

$$2(x+y+z)^2=800 \Rightarrow x+y+y=\pm 20.$$

D.m.th. kemi dy raste:

1) $x+y+z=20$. Sistemi i dhënë shndërrohet në trajtën

$$\begin{cases}(x+y)\cdot 20=100\\(y+z)\cdot 20=300\\(x+z)\cdot 20=400\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=50\\y+z=15\\x+z=20\end{cases}.$$

Nga $x+y+z=20 \Rightarrow 5-z=20 \Rightarrow z=15$ (sepse $x+y=5$).

Nga $x+y+z=20 \Rightarrow x+15=20 \Rightarrow x=5$.

Nga $x+y+z=20 \Rightarrow y+20=20 \Rightarrow y=0$.

Pra $x=5,\ y=0,\ z=15$.

2) $x+y+z=-20$. Sistemi i dhënë shndërrohet në trajtën

$$\begin{cases}-20(x+y)=100\\-20(y+z)=300\\-20(x+z)=400\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=-5\\y+z=-15\\x+z=-20\end{cases}.$$

Si në rastin e parë merret $x=-5,\ y=0,\ z=-15$.

Detyra për ushtrime

1. Të zgjidhet sistemi i barazimeve $\begin{cases}(x+y+z)(x+y)=z\\(x+y+z)(y+z)=x\\(x+y+z)(x+z)=y\end{cases}$.

2. Nëse $6x+10y+10z-1=0$, të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases}(x+y+z)(x+y)=x\\(x+2y+z)(y+z)=y\\(x+2y+3z)(x+z)=z\end{cases}.$$

2. Sistemin e dhënë e transformojmë si vijon:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{5}{18} \\ \dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{13}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{18} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{13}{16} \end{cases}.$$

Zëvendësojmë $\frac{1}{x}=a,\ \frac{1}{y}=b,\ \frac{1}{z}=c$. Merret sistemi

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{5}{12} \\ b+c=\dfrac{5}{18} \\ a+c=\dfrac{13}{16} \end{cases}$$, me zgjidhjen e të cilit merret $a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{6},\ c=\frac{1}{9}$,

prej nga përfundimisht $x=4,\ y=6,\ z=9$.

Detyrë për ushtrime

3. Të zgjidhet sistemi $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=2z \\ \dfrac{yz}{y+z}=4x \\ \dfrac{xz}{x+z}=8y \end{cases}$.

3. Zëvendësojmë $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=a$ dhe $g(2x+1)=b$. Merret sistemi

$\begin{cases} a+b=2x \\ a-b=x \end{cases}$, me zgjidhjen e të cilit merret $a=\frac{3}{2}x,\ b=\frac{1}{2}x$.

Kthehemi në zëvendësimin fillestar:

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{3}{2}x \text{ dhe } g(2x+1)=\frac{1}{2}x.$$

Le të zgjidhim barazimin e parë. Zëvendësojmë $\frac{x}{x-1}=t \Rightarrow x=\frac{t}{t-1}$.

Atëherë $f(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{x-1}$. Ngjashëm duke zëvendësuar $2x+1=s$ merret

$g(x)=\frac{x-1}{4}$.

Detyrë për ushtrime

4. Të caktohet $f(x)$, $g(x)$ dhe $h(x)$ nëse

$$\begin{cases} f\left(\frac{x+1)}{x-2}\right)+g(x+1)=0 \\ g(x+1)+h(x-2)=x \\ f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+h(x-2)=3x \end{cases}.$$

4. Shumëzojmë të dy anët e barazimit

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$

me $(x-1)(x+1)(x^2+1)=x^4-1$. Merret

$1=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)$

$1=A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+(Cx+D)(x^2-1)$

$1=Ax^3+Ax^2+ax+Bx^3-Bx^2+Bx-B+Cx^3+Dx^2-Cx-D$

$1=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)$

Kemi sistemin

$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=1 \end{cases}$, me zgjidhjen e të cilit merret

$A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}, C=0, D=-\frac{1}{2}$.

Detyrë për ushtrime

5. Të caktohet vlerave parametrave realë A,B,C ashtu që të vlejë barazimi

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

6. A ekzistojnë numrat realë A, B, C, D, E, F të ndryshëm nga 0 ashtu që të vlej barazimi $\frac{1}{x^8-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{x^4+1}$?

5. Transformojmë sistemin e dhënë si vijon:

$$\begin{cases}(x^2-2x+1)+(4y^2-4y+1)=7\\(4y^2-4y+1)+(9x^2-6z+1)=8\\(9z^2-6z+1)+(x^2-2x+1)=9\end{cases}\sim\begin{cases}(x-1)^2+(2y-1)^2=7\\(2y-1)^2+(3z-1)^2=8\\(3z-1)^2+(x-1)^2=9\end{cases}.$$

Zëvendësojmë $(x-1)^2=a;\ (2y-1)^2=b;\ (3z-1)^2=c$.

Sistemi merr formën

$\begin{cases}a+b=7\\b+c=8\\a+c=9\end{cases}$, me zgjidhjen e të cilit kemi: $a=4,\ b=3,\ c=5$.

Kthehemi tek zëvendësimet fillestare:

$(x-1)^2=4\Rightarrow\ x-1=-2$ dhe $x-1=2$. Pra $x=-1,\ x=3$:

$(2y-1)^2=3\Rightarrow 2y-1=-\sqrt{3};\ 2y-1=\sqrt{3}.$ Pra $y=\frac{1-\sqrt{3}}{2},\ y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$(3z-1)^2=5\Rightarrow 3z-1=-\sqrt{5};\ \ 3z-1=\sqrt{5}.$ Pra $z=\frac{1-\sqrt{5}}{3},\ z=\frac{1+\sqrt{5}}{3}$.

Sistemi ka tetë zgjidhje: $\left(-1,\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{3}\right),\ \left(-1,\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right),$

$\left(-1,\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{3}\right),\ \left(-1,\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right),\ \left(3,\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{3}\right),$

$\left(3,\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right),\ \left(3,\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{3}\right),\ \left(3,\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right).$

Detyrë për ushtrime

7. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases}x^3+y^3+3(x+4y)=3(x^2+2y^2)+14\\y^3+z^3+3(4y+9z)=3(2y^2+3z^2)+48\\z^3+x^3+3(x+9z)=3(x^2+3z^2)+38\end{cases}.$$

6. Barazimin e parë të sistemit e shkruajmë në trajtën

$$(x-y)^2(x+y)=96\,. \qquad (1)$$

Nga zëvendësimi i barazimit të dytë në (1) kemi $(x-y)^2=16$.

Pra kemi sistemin

$$\begin{cases}(x-y)^2=16\\ x+y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x-y|=4\\ x+y=6\end{cases}.$$

Dallojmë rastet 1) $x-y=4$ dhe 2) $x-y=-4$.

1) Nëse $x-y=4$ kemi sistemin

$$\begin{cases}x-y=4\\ x+y=6\end{cases}, \text{ prej nga } x=5,\ y=1\,.$$

2) Nëse $x-y=-4$ merret sistemi

$$\begin{cases}x-y=-4\\ x+y=6\end{cases}, \text{ prej nga } x=1,\ y=5\,.$$

Për fundojmë se bashkësia e zgjidhjeve të sistemit të dhënë është $\{(5,1),\ (1,5)\}$.

7. Dallojmë rastet: 1) $x\ge 0,\ y\ge 0$; 2) $x\ge 0,\ y<0$; 3) $x<0,\ y\ge 0$;
4) $x<0,\ y<0$ të cilat do t'i shqyrtojmë ndaras.

1) Le të jetë $x\ge 0,\ y\ge 0$. Atëherë $|x|=x,\ |y|=y$. Sistemi i dhënë kalon në formën:

$$\begin{cases}x+x-y=2\\ y-x+y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}2x-y=2\\ 2y-x=4\end{matrix} \Leftrightarrow x=\frac{8}{3},\ y=\frac{10}{3}\,.$$

2) Le të jetë $x\ge 0,\ y<0$. Atëherë $|x|=x,\ |y|=-y$. Sistemi i dhënë kalon në formën:

$$\begin{cases}x+x+y=2\\ y-x-y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}2x+y=2\\ -x=4\end{matrix} \Leftrightarrow x=-4,\ y=10\,.$$

D.m.th. në këtë rast detyra nuk ka zgjidhje. Pse?

3) Le të jetë $x<0,\ y>0$. Atëherë $|x|=-x,\ |y|=y$. Sistemi kalon në trajtën:

$$\begin{cases}x-x-y=2\\ y-(-x)+y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2\\ x+2y=4\end{cases} \Leftrightarrow x=8,\ y=-2\,.$$

Edhe në këtë rast detyra nuk ka zgjidhje.

4) Le të jetë $x<0,\ y<0$. Atëherë $|x|=-x,\ |y|=-y$. Sistemi kalon në trajtën:

$$\begin{cases} x-x-(-y)=2 \\ y-(-x)-y=4 \end{cases} \Rightarrow y=2,\ x=4 .$$

Sistemi nuk ka zgjidhje.

Nga rastet 1) dhe 4) përfundojmë se $x=\frac{8}{3},\ y=\frac{10}{3}$ është zgjidhje e sistemit.

Detyra për ushtrime

8. Të zgjidhet sistemi i barazimeve $\begin{cases} 2x+|x-2|+|y-1|=6 \\ x-|x-2|-|y-1|=4 \end{cases}$.

9. Të zgjidhet sistemi i barazimeve $\begin{cases} x+|y-1|=a \\ y+|x-3|=3 \end{cases}$, ku a është numër realë pozitiv.

8. Sistemi i dhënë transformohet si vijon:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2)-33(x-y)=0 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)-17(x+y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-33)=0 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-17)=0 \end{cases}.$$

Dallojmë rastet:

1) Nëse $x=y$, atëherë nga barazimi i dytë i sistemit merret:

$$2x(x^2-x^2+x^2-17)=0 \Rightarrow x(x^2-17)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\sqrt{17},\ x=-\sqrt{17} .$$

Pra $(0,0),\ (\sqrt{17},\sqrt{17}),\ (-\sqrt{17},-\sqrt{17})$ janë zgjidhje të sistemit të barazimeve.

2) Nëse $x=-y$, nga barazimi i parë merret $x=0,\ x=\sqrt{33},\ x=-\sqrt{33}$. Zgjidhjet e sistemit janë: $(0,0),\ (\sqrt{33},-\sqrt{33}),\ (-\sqrt{33},\sqrt{33})$.

3) Nëse $x\neq y$ dhe $x\neq -y$. Sistemi i dhënë kalon në formën

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=33 \\ x^2-xy+y^2=17 \end{cases}.$$

Duke zbritur barazimin e dytë nga barazimi i parë merret $xy=8$.

Sistemi merr formën:

$$\begin{cases}(x+y)^2=33-xy\\(x-y)^2=17-xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2=33-8\\(x-y)^2=17-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x+y|=5\\|x-y|=3\end{cases}.$$

Nga sistemi i fundit kemi rastet:

i) $x+y>0,\ x-y>0$; ii) $x+y>0,\ x-y<0$

iii) $x+y<0,\ x-y>0$; iv) $x+y<0,\ x-y<0$,

të cilat do t'i shqyrtojmë ndaras.

i) $x+y>0\Rightarrow|x+y|=x+y,\ \ x-y>0\Rightarrow|x-y|=x-y$. Kemi

$$\begin{cases}x+y=5\\x-y=3\end{cases}\Rightarrow x=4,\ y=1.$$

ii) Nëse $x+y>0,\ x-y<0$, atëherë $|x+y|=x+y,\ |x-y|=y-x$. Kemi

$$\begin{cases}x+y=5\\-x+y=3\end{cases}\Rightarrow x=1,\ y=4.$$

iii) Nëse $x+y<0,\ x-y>0$, atëherë $|x+y|=-x-y,\ |x-y|=x-y$. Merret

$$\begin{cases}-x-y=5\\x-y=3\end{cases}\Rightarrow x=-1,\ y=-4.$$

iv) Nëse $x+y<0,\ x-y<0$, merret $|x+y|=-x-y,\ |x-y|=y-x$. Kemi

$$\begin{cases}-x-y=5\\-x+y=3\end{cases}\Rightarrow x=-4,\ y=-1.$$

Përfundojmë se zgjidhjet e sistemit të dhënë janë:

$(0,0),\ (\sqrt{17},\sqrt{17}),\ (-\sqrt{17},-\sqrt{17}),\ (\sqrt{33},-\sqrt{33}),\ (-\sqrt{33},\sqrt{33})$

$(4,1),\ (1,4),\ (-1,-4),\ (-4,-1)$.

9. Marrim zëvendësimet: $x+y=A;\ x+z=B;\ z+y=C$. Kemi sistemin

$$\begin{cases}AB=a^2\\BC=b^2\\CA=c^2\end{cases}.$$

Pasi të shumëzohen anë për anë barazimet e sistemit të fundit merret

$$(ABC)^2=(abc)^2\Rightarrow ABC=abc\ \text{ ose }\ ABC=-abc.$$

1) Le të jetë $ABC = abc$.

Nga $AB = a^2 \Rightarrow a^2C = abc \Rightarrow C = \frac{bc}{a}$.

Nga $BC = b^2 \Rightarrow Ab^2 = abc \Rightarrow A = \frac{ac}{b}$.

Nga $AC = c^2 \Rightarrow Bc^2 = abc \Rightarrow B = \frac{ab}{c}$.

Kemi sistemin

$$\begin{cases} x + y = \frac{ac}{b} \\ x + z = \frac{ab}{c} \\ y + z = \frac{bc}{a} \end{cases}.$$

Duke zbritur barazimin e dytë nga barazimi i parë merret

$$\begin{cases} y - z = \frac{ac}{b} - \frac{ab}{c} \\ y + z = \frac{bc}{a} \end{cases}, \text{ prej nga}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b} - \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right),\ z = \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a} - \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right).$$

Nga barazimi $x + y = \frac{ac}{b}$ merret $x = \frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b} - \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c}\right)$.

2) Le të jetë $ABC = -abc$. Ngjashëm si më sipër kemi $A = -\frac{ac}{b}$, $B == \frac{ab}{c}$,

$c = -\frac{bc}{a}$.

Merret sistemi:

$$\begin{cases} x + y = \frac{ac}{b} \\ x + z = \frac{ab}{c} \\ y + z = \frac{bc}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}-\frac{ac}{b}-\frac{ab}{c}\right),\ y=\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c}-\frac{ac}{b}-\frac{bc}{a}\right),\ z=\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}-\frac{ab}{c}-\frac{bc}{a}\right).$$

Detyrë për ushtrime

10. A ka zgjidhje sistemi i barazimeve

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{x+z}=1\\ \dfrac{x+z}{z+y}=4\\ \dfrac{z+y}{x+y}=9\end{cases}?$$

10. Sistemi i dhënë transformohet si vijon:

$$\begin{cases}(y+z)^2-x^2=3\\ (z+x)^2-y^2=4\\ (x+y)^2-z^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y+z-x)(y+z+x)=3\\ (z+x-y)(z+x+y)=4\\ (x+y-z)(x+y+z)=9\end{cases}. \qquad (1)$$

Duke i mbledhur anë për anë barazimet e sistemit të fundit merret

$$(x+y+z)(y+z-x)+(x+y+z)(z+x-y)+(x+y+z)(x+y-z)=16$$

$$(x+y+z)(y+z-x+z+x-y+x+y-z)=16$$

$$(x+y+z)(x+y+z)=16\Rightarrow(x+y+z)^2=16.$$

Pra $x+y+z=4$ ose $x+y+z=-4$.

1) Nëse $x+y=z=4$, sistemi (1) kalon në trajtën:

$$\begin{cases}y+z-x=\dfrac{3}{4}\\ z+x-y=1\\ x+y-z=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{13}{8};\ y=\frac{3}{2};\ z=\frac{7}{8}.$$

2) Nëse $x+y+z=-4$, sistemi (1) kalon në trajtën

$$\begin{cases}y+z-x=-\dfrac{3}{4}\\ z+x-y=-1\\ x+y-z=-\dfrac{9}{4}\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{13}{8};\ y=-\frac{3}{2};\ z=-\frac{7}{8}.$$

Përfundojmë se bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është

$$\left\{\left(\frac{13}{8},\frac{3}{2},\frac{7}{8}\right),\left(-\frac{13}{8},-\frac{3}{2},-\frac{7}{8}\right)\right\}.$$

Detyrë për ushtrime

11. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} x^2-4=(y-z)^2 \\ y^2-9=(z-x)^2 \\ z^2-16=(x-y)^2 \end{cases}.$$

11. Së pari është e qartë se $m\neq\pm n,\ m,n\neq 0$. Pse?

Nga barazimi i dytë merret $x-y=4mn\Rightarrow x=y+4mn$.

Këtë e zëvendësojmë në barazimin e parë dhe marrim

$$\frac{y+4mn}{m+n}+\frac{y}{m-n}=2m\Leftrightarrow (y+4mn)(m-n)+y(m+n)=2m(m+n)(m-n)$$

$$\Leftrightarrow ym-yn+4mn(m-n)+ym+yn=2m(m+n)(m-n)$$

$$\Leftrightarrow 2ym=2m(m-n)(m+n-2n)\Leftrightarrow 2ym=2m(m-n)^2$$

$\Rightarrow y=(m-n)^2>0$, sepse $m\neq n$.

Atëherë $x=(m-n)^2+4mn=(m+n)^2>0$, sepse $m\neq -n$.

Përfundojmë se sistemi ka zgjidhje pozitive.

Shënim. Më sipër nga ekuacioni $2ym=2m(m-n)^2$ pjesëtuam me $2m$. Një gjë e tillë është e mundur sepse nga kushti $mn\neq 0$ merret që $m\neq 0$ dhe $n\neq 0$.

12. Nga mosbarazimi i dhënë merret mosbarazimet:

1) $\dfrac{n-2}{n+2}>1$

2) $\dfrac{n-2}{n+2}<4$, të cilat do t'i zgjidhim ndaras.

1) Mosbarazimi është ekuivalent me mosbarazimin:

$$\frac{n-2}{n+2}-1>0\Leftrightarrow\frac{n-2-n-2}{n+2}>0\Leftrightarrow\frac{-4}{n+2}>0\Rightarrow n+2<0\Rightarrow n<-2 .$$

2) Mosbarazimi është ekuivalent me mosbarazimin:

$$\frac{n-2}{n+2}<4<0 \Leftrightarrow \frac{n-2-4n-8}{n+2}<0 \Leftrightarrow \frac{-3n-10}{n+2}<0 .$$

Kemi rastet:

i) $\begin{cases} -3n-10<0 \\ n+2>0 \end{cases}$, ii) $\begin{cases} -3n-10>0 \\ n+2<0 \end{cases}$.

Nga rasti i) merret $n>-2$. Nga rasti ii) merret $n<-\frac{10}{3}$.

Pra $n>-2$ ose $n<-\frac{10}{3}$.

Përfundimisht nga 1) dhe 2) merret $n<-\frac{10}{3}$.

Detyrë për ushtrime

Të zgjidhen sistemet e barazimeve

12. $\frac{1}{12}<\frac{n}{n-1}<\frac{1}{6}$. **13.** $\frac{n}{n+1}<\frac{1}{4}<\frac{n+2}{n+3}$.

13. Nga barazimi i dytë i sistemit kemi $x=\frac{m+3y}{2}$. Zëvendësojmë në barazimin e parë dhe marrim.

$$(m+2)\frac{(m+3y)}{2}+my=5 \Leftrightarrow (m+2)(m+3y)+2my=10$$

$$\Leftrightarrow m(m+2)+3y(m+2)+2my=10 \Leftrightarrow y(3m+6+2m)=10-m(m+2)$$

$$\Rightarrow y=\frac{10-m(m+2)}{5m+6}.$$

Atëherë $x=\frac{m}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{10-m(m+2)}{5m+6}\right)=\frac{m}{2}+\frac{15}{5m+6}-\frac{3m(m+2)}{2(5m+6)}$.

Atëherë nga kushti $x-\frac{3}{2}y=\frac{m}{2}$ merret

$$\frac{m}{2}+\frac{15}{5m+6}-\frac{3m(m+2)}{2(5m+6)}-\frac{3}{2}\left(\frac{10}{5m+6}-\frac{m(m+2)}{5m+6}\right)=m$$

$$\frac{m}{2}+\frac{15}{5m+6}-\frac{3m(m+2)}{2(5m+6)}-\frac{15}{5m+6}+\frac{3m(m+2)}{2(5m+6)}=m$$

$$m-\frac{m}{2}=0 \Rightarrow m=0 .$$

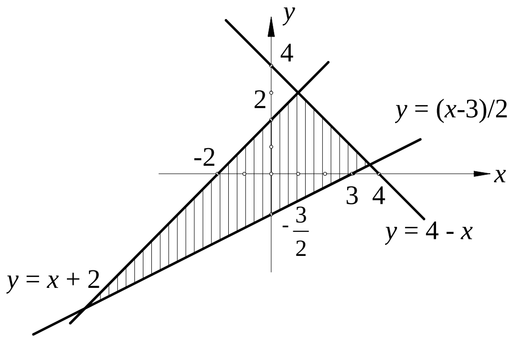
Detyrë për ushtrime

14. Është dhënë sistemi $\left.\begin{array}{r}(m+1)x+y=3\\ x-my=5\end{array}\right\}$. Të caktohet parametri realë m $(m\neq 0, m\neq -1)$ ashtu që zgjidhjet e sistemit të plotësojnë relacionin $|x+y|=2$.

14. Sistemin e dhënë e shkruajmë në trajtën

$$\begin{cases} y<x+2 \\ y=4-x \\ y>(x-3)/2 \end{cases}.$$

Paraqesim grafikisht drejtëzat $y=x+2,\ y=4-x,\ y=\dfrac{x-3}{2}$.



Pjesa e hijëzuar paraqet zgjidhjen e sistemit të mosbarazimit.

15. Transformojmë sistemin e dhënë si vijon:

$$\begin{cases} x^2+5x+6>0 \\ x^3+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+3)>0 \\ (x+1)(x^2-x+1)<0 \end{cases}.$$

Më parë kemi treguar se $x^2-x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Pra mosbarazimi i dytë $(x+1)(x^2-x+1)<0$ ka zgjidhje nëse $x+1<0$, pra $x<-1$.

Le t'i kthehemi mosbarazimit të parë.

Dallojmë rastet:

1) $\begin{cases} x+2>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ dhe 2) $\begin{cases} x+2<0 \\ x+3<0 \end{cases}$.

Nga rasti i parë merret $x>-2$. Meqë nga mosbarazimi i dytë morrëm $x<-1$. Përfundojmë se $x\in(-2,-1)$.

Nga rasti i dytë merret $x < -3$. Nga mosbarazimi i dytë morrëm $x < -1$. Pra $x < -3$.

Përfundojmë se $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, -1)$.

Detyrë për ushtrime

15. Të zgjidhet sistemi i mosbarazimeve $\begin{cases} x^2 - 10x + 9 > 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$.