VI. OLIMPIADAT NDËRKOMBËTARE TË MATEMATIKËS

6.1 DETYRAT NGA TRIGONOMETRIA TË PARASHTRUARA NË OLIMPIADAT NDËRKOMBËTARE TË MATEMATIKËS

1. Le të jenë *a*, *b*, *c* numra real. Le të jetë dhënë barazimi kuadratik sipas $\cos x$

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0 \qquad (1)$$

Duke përdorur numrat *a*, *b*, *c* formoni barazimin kuadratik sipas $\cos 2x$ rrënjët e të cilit janë rrënjët e barazimit (1). Krahasoni barazimet sipas $\cos x$ dhe $\cos 2x$ për $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$.

(Olimpiada e parë ndërkombëtare e matematikës, Rumuni – 1959)

2. Është dhënë trekëndëshi kënddrejtë *ABC* hipotenuza e të cilit ($BC = a$) është ndarë në *n*-pjesë të barabarta (*n* – është numër tek). Le të jetë α - këndi nën të cilin nga pika *A* shihet ajo pjesë nga *n*-pjesët e barabarta e cila përmban mesin e trekëndëshit të dhënë. Nëse *h* është lartësia e trekëndëshit, vërtetoni se

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)\cdot a}.$$

(Olimpiada e dytë ndërkombëtare e matematikës, Rumuni – 1960)

3. Të zgjidhet barazimi $\cos^n x - \sin^n x = 1$, $(n \in N)$.

4. Le të jenë *a*, *b*, *c* dhe *S* brinjët dhe syprina e trekëndëshit *ABC*, përkatësisht. Vërtetoni mosbarazinë

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

Kur vlen barazimi?

(Olimpiada e tretë ndërkombëtare e matematikës, Hungari – 1961)

5. Të zgjidhet barazimi $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

6. Le të jetë dhënë trekëndëshi barakrahës. Le të jetë r - rrezja e rrethit të jashtëshkruar dhe ρ - rrezja e rrethit të brendashkruar. Vërtetoni se distanca d në mes të qendrave të këtyre dy rrathëve është

$$d = \sqrt{r(r-2\rho)} \,.$$

(Olimpiada e katërtë ndërkombëtare e matematikës, Çekosllovaki – 1962)

7. Vërtetoni identitetin $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

(Olimpiada e pestë ndërkombëtare e matematikës, Poloni – 1963)

8. Të caktohen të gjitha vlerat reale të x – it nga segmenti $[0, 2\pi]$ për të cilat vlen $2\cos x \le \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \le \sqrt{2}$.

(Olimpiada e shtatë ndërkombëtare e matematikës, Gjermani Lindore – 1965)

9. Vërtetoni se nëse për brinjët a, b, c dhe këndet α, β, γ të trekëndëshit vlen $a + b = \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}(a\,\mathrm{tg}\alpha + b\,\mathrm{tg}\beta)$ atëherë trekëndëshi është barakrahës.

10. Vërtetoni identitetin

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \mathrm{ctg}x - \mathrm{ctg}2^n x,$$

ku $n \in N$ dhe $x \ne \frac{l\pi}{2^k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, l \in Z$).

(Olimpiada e tetë ndërkombëtare e matematikës, Bullgari – 1966)

11. Le të jetë dhënë paralelogrami $ABCD$ në të cilin: $AB = a$, $AD = 1$, $\angle DAB = \alpha$. Trekëndëshi ABD le të jetë këndngushtë. Vërtetoni se rrathët R_A, R_B, R_C, R_D me rreze 1 me qendër në pikat A, B, C dhe D përkatësisht mbulojnë paralelogramin atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$a \le \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha \,.$$

(Olimpiada e nëntë ndërkombëtare e matematikës, Jugosllavi – 1967)

12. Vërtetoni se ekziston një dhe vetëm një trekëndësh brinjët e të cilit janë numra të plotë të njëpasnjëshëm, kurse njëri nga këndet është dy herë më i madhë se njëri nga këndet tjera.

(Olimpiada e dhjetë ndërkombëtare e matematikës, BRSS – 1968)

13. Le të jenë $a_1, a_2, ..., a_n$ konstante reale, x – ndryshore reale dhe

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + ... + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}$$

Vërtetoni se nga $f(x_1) = f(x_2) = 0$ rrjedh se $\frac{x_1 - x_2}{\pi}$ është numër i plotë.

(Olimpiada e njëmbëdhjetë ndërkombëtare e matematikës, Rumuni – 1969)

14. Është dhënë trekëndëshi *ABC*. Vërtetoni se mosbarazia

$$\sin A \cdot \sin B \leq \sin^2 \frac{C}{2}$$

vlen atëherë dhe vetëm atëherë nëse në brinjën *AB* ekziston pika *D* e tillë që gjatësia *CD* paraqet të mesmen gjeometrike të segmenteve *AD* dhe *BD*.

(Olimpiada e gjashtëmbëdhjetë ndërkombëtare e matematikës, Gjermani Lindore – 1974)

15. A është e mundur që në rrethin me rreze 1 të caktohen 1975 pika, të tilla që distanca mes çdo dy pikave të jetë numër racional?

16. Në brinjët e trekëndëshit të çfarëdoshëm *ABC* janë konstruktuar nga jashtë trekëndëshat *ABR*, *BCP*, *CAQ* ashtu që $\angle CBP = \angle CAQ = 45^\circ$; $\angle BCP = \angle ACQ = 30^\circ$; $\angle ABR = \angle BAR = 15^\circ$.

Vërtetoni se $QRP = 90^\circ$ dhe $QR = RP$.

(Olimpiada e shtatëmbëdhjetë ndërkombëtare e matematikës, Bullgari – 1975)

17. Syprina e sipërfaqes së katërkëndëshit konveks është 32 cm^2, kurse shuma e dy brinjëve të tij të kundërta dhe njërës diagonale është 16 cm. Të caktohen të gjitha vlerat të cilat mund t'i ketë diagonalja tjetër.

18. Le të jetë $P_1(x) = x^2 - 2$, $P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x))$ për $k = 2,3,..$

Vërtetoni se për çdo numër natyror n të gjitha rrënjët e barazimit $P_k(x) = x$ janë reale dhe të ndryshme mes veti.

(Olimpiada e tetëmbëdhjetë ndërkombëtare e matematikës, Austri – 1976)

19. Le të jenë *a*, *b*, *A*, *B* numra të dhënë real. Shqyrtojmë funksionin

$$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x.$$

Nëse $f(x) \geq 0, \ \forall x \in R,$ vërtetoni se $a^2 + b^2 \leq 2$ dhe $A^2 + B^2 \leq 1.$

(Olimpiada e nëtëmbëdhjetë ndërkombëtare e matematikës, Jugosllavi – 1977)

20. Është dhënë trekëndëshi barakrahës *ABC* (*AB* = *AC*). Rrethi i cili nga brenda e tangjenton rrethin e jashtëshkruar të trekëndëshit *ABC* i takon brinjët *AB* dhe *AC* në pikat *P* dhe *Q*, përkatësisht. Tregoni se mesi i segmentit *PQ* është qendër e rrethit të brendashkruar në trekëndëshin *ABC*.

(Olimpiada e njëzetë ndërkombëtare e matematikës, Rumuni – 1978)

21. Në trekëndëshin këndngushtë *ABC* simetralja e brendshme e këndit *A* e pret brinjën *BC* në pikën *L* kurse rrethin e jashtëshkruar në të njëjtin trekëndësh e pret në pikën *N*. Nga pika *L* janë konstruktuar normalet në *AB* dhe *AC*. Le të jenë *K*,*M* pikëprerjet e normaleve me brinjët *AB* dhe *AC* përkatësisht. Vërtetoni se katërkëndëshi *AKNM* dhe trekëndëshi *ABC* kanë sipërfaqe të barabarta.

(Olimpiada e njëzet e tetë ndërkombëtare e matematikës, Kubë – 1987)

22. Është dhënë trekëndëshi *ABC* dhe *P* pikë e brendshme e tij. Vërtetoni se së paku një nga këndet $\angle PAB, \angle PBC, \angle PCA$ është më i vogël ose baraz me 30°.

(Olimpiada e tridhjet e dytë ndërkombëtare e matematikës, Suedi – 1991)

23. Le të jetë *ABCDEF* gjashtëkëndëshi konveks ashtu që *AB* të jetë paralel me *DE*, *BC* paralel me *EF* dhe *CD* paralel me *FA*. Le të jenë R_A, R_C, R_E rrezet e rrathëve të jashtëshkruar të trekëndëshave *FAB*, *BCD*, *DEF*, përkatësisht dhe le të jetë *P* perimetri i gjashtëkëndëshit. Vërtetoni se

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{P}{2}.$$

(Olimpiada e tridhjet e shtatë ndërkombëtare e matematikës, Indi – 1996)

24. Le të jetë *I* qendra e rrethit të brendashkruar në trekëndëshin *ABC*. Rrethi i brendashkruar në trekëndëshi *ABC* le të takojë brinjët *BC*, *CA* dhe *AB* në pikat *K*, *L* dhe *M*, përkatësisht. Drejtëza që kalon nëpër *B* dhe është paralelele me *MK* pret drejtëzat *LM* dhe *LK* në pikat *R* dhe *S*, përkatësisht. Vërtetoni se këndi *RIS* është i ngushtë.

(Olimpiada e tridhjet e nëntë ndërkombëtare e matematikës, Tajvan – 1998)

25. Le të jetë *ABC* trekëndësh këndngushtë me qendër të rrethit të jashtëshkruar *O*. Le të jetë *P* në *BC* këmbëza e lartësisë së lëshuar nga *A*. Supozojmë se vlen $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$.

Vërtetoni se $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

(Olimpiada e katërdhjet e dytë ndërkombëtare e matematikës, SHBA – 2001)