ZGJIDHJE, UDHËZIME DHE REZULTATE

I. ELEMENTET E TRIGONOMETRISË

1.1 NJËSITË PËR MATJEN E KËNDEVE

1. Së pari po japim përkufizimin e masës së këndit të shprehur në radian.

Masa e një këndi θ *e shprehur në radian jepet me formulën* $\theta = \frac{l}{r}$ (radian) *ku* l *është gjatësia e harkut rrethor që i përgjigjet këndit qendror dhe* r *është rrezja e rrethit.* (shih figurën 15).

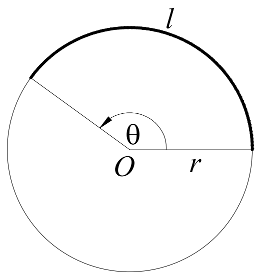

Fig. 15

Le të shprehim këndin 360° në radian. Në këtë rast l është perimetri i rrethit, pra $l = 2 \cdot \pi \cdot r$, kështu $\theta = \frac{l}{r} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} = 2\pi$.

Pra $360^\circ = 2\pi$ radian, d.m.th. $180^\circ = \pi$ radian.

Shënimi 1: Shohim se për $l = r$ kemi këndin $\theta = 1$ radian, pra mund të themi:

Këndi me kulm në qendër të rrethit, gjatësia e harkut të të cilit është e barabartë me rrezen e rrethit është 1 radian. (shih figurën 16).

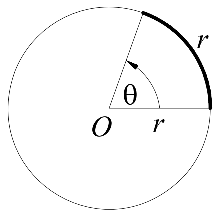

Fig. 16

Shënimi 2: Nga ajo që u tha më sipër tregohet lehtë se për të shndërruar këndin nga shkallët në radian, atë e shumëzojmë me $\frac{\pi}{180^\circ}$, pra $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$ (α është këndi i dhënë i shprehur në shkallë), kurse për të shndërruar këndin nga radian në shkallë, këndin e shumëzojmë me $\frac{180^\circ}{\pi}$, pra $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \theta$ (θ është këndi i dhënë i shprehur në radian).

2. Nga detyra 1 kemi $180^\circ = \pi$ radian.

Duke pjesëtuar të dy anët e barazisë së mësipërme me 180 kemi

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radian} = \frac{3.14159...}{180} \approx 0.017453 \text{ radian}.$$

3. Veprojmë ngjashëm si në detyrën 2, me përjashtim se të dy anët e barazisë

$$180^\circ = \pi \,\text{radian}$$

i pjesëtojmë me π, me ç'rast merret

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{3.14159...} \approx 57{,}29578^\circ = 57^\circ 17'.$$

4. Nga shënimi 2 i detyrës 1 kemi $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \alpha$, ku α është këndi i dhënë i shprehur në shkallë, pra:

a) për $\alpha = 90^\circ$ kemi $\varphi = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ radian;

b) $\frac{\pi}{6}$ radian; c) $\frac{\pi}{3}$ radian.

5. a) $\frac{5\pi}{6}$ radian; b) $\frac{4\pi}{3}$ radian; c) $\frac{11\pi}{90}$ radian.

6. a) $\frac{37\pi}{720}$ radian; b) $\frac{8\pi}{225}$ radian; c) $-\frac{17\pi}{6}$ radian.

7. Nga shënimi 2 i detyrës 1 kemi $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \theta$, ku θ është këndi i dhënë i shprehur në radian, pra:

a) për këndin $\theta = \frac{3\pi}{2}$ kemi $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$;

b) -150°; c) 2.3 radian $= 2.3 \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \approx 131.8^\circ$.

8. a) 90°; b) 85°; c) 15°.

9. a) 30°; b) 60°; c) 45°.

10. a) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$; b) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

11. *Udhëzim*: Shfrytëzohen relacionet $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 7 : 8$.

12. Nga detyra 2

$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.017453$ radian;

$1^\circ = 60'$ (minuta). D.m.th. $1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \approx 0.000291$;

dhe në fund

$1^\circ = 60\cdot60$ (sekonda) $= 3600''$; pra $1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 3600} \approx 0.000005$ radian.

13. Nga detyra paraprake kemi:

a) 35·0.017453 radian = 0.610855 radian

42·0.000291 radian = 0.012222 radian

<u>17·0.000005 radian = 0.000085 radian.</u>

Pra $35^\circ 42'17'' = 0.623162$ radian;

b) 0.223875 radian; c) 3.011579 radian.

14. $1\,\text{radian} = \dfrac{180 \cdot 60'}{\pi} \approx 3438'$ $\quad 1\,\text{radian} = \dfrac{180 \cdot 3600''}{\pi} \approx 206265''$.

15. Nga detyra 3 kemi:

a) $0.2755\,\text{radian} = 0.2755 \cdot 57.29578^\circ \approx 15.78499^\circ$

kurse nga detyra 14 kemi:

$0.2755\,\text{radian} = 0.2755 \cdot 3438' \approx 947.169'$

$0.2755\,\text{radian} = 0.2755 \cdot 206265'' \approx 56826''$

përfundimisht $0.2755\,\text{radian} = 15^\circ 47'6''$;

b) $62^\circ 14'7''$; c) $39^\circ 30''$.

18. a) $l = r \cdot \varphi = 10 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{20\pi}{3} \approx 20{,}9$ cm;

b) $l = 15\pi \approx 47.1$ cm; c) $l = \dfrac{5\pi}{3} \approx 5.23$ cm;

19. a) $S = \dfrac{1}{2} r^2 \cdot \varphi = \dfrac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \dfrac{\pi}{6} = 3\pi\ \text{cm}^2$;

b) $S = \dfrac{27}{2}\pi\ \text{cm}^2$; c) $S = 15\pi\ \text{cm}^2$;

d) $S = \dfrac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{2 \cdot 180} = \dfrac{36 \cdot \pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 6\pi\ \text{cm}^2$; e) $S = 14\pi\ \text{cm}^2$.

20. Nga detyra 17, $S = \dfrac{1}{2} r^2 \cdot \varphi$, nga detyra 16 kemi $l = r \cdot \varphi$ pra $r = \dfrac{l}{\varphi}$.

D.m.th.

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{\varphi}\right)^2 \cdot \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{\varphi^2} \cdot \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{\frac{\varphi}{12}} \frac{36}{\pi} = \frac{6 \cdot 36}{\pi} = 68.7\ \text{cm}^2.$$

21. Së pari le të cekim se pikat në sipërfaqen e tokës përcaktohen me dy koordinata: gjerësinë dhe gjatësinë gjeografike. Gjerësia gjeografike paraqet këndin në veri (ose jug) të rrafshit ekuatorial, kurse gjatësia gjeografike paraqet këndin në lindje (ose perëndim) të rrafshit që kalon nëpër meridianin kryesor, (shih figurën 17).

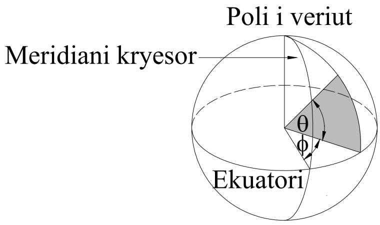

Fig. 17

Kështu që në rastin tonë, dy qytetet shtrihen në rrethin me rreze 6370 km dhe përcaktojnë këndin qendror prej $29^\circ + 43^\circ = 72^\circ$, kështu që gjatësia e harkut (distanca në mes tyre) është $l = r \cdot \varphi = 6370 \cdot \dfrac{72\pi}{180} = 8000.72\text{km}$.

22. $\alpha = 2\,\text{radian}$ **.**

25. *Udhëzim:* Le të shënohet $x = AB$. Meqë $l = r \cdot \varphi \Rightarrow 8 = x \cdot \varphi$. Poashtu vlen $18 = (x+10)\cdot\varphi$. Rezultati është: $x = 8,\ \varphi = 1,\ S = 130$.

1.2 PËRKUFIZIMI I FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE TË KËNDIT TË NGUSHTË

1. $\dfrac{AC}{DC} = \text{ctg}30^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow AC = DC \cdot \sqrt{3} = 31\sqrt{3}$ **;**

$\dfrac{BC}{DC} = \text{ctg}45^\circ = 1 \Rightarrow BC = DC = 31;$

$AB = AC - BC = 31\sqrt{3} - 31 = 31(\sqrt{3} - 1)$ **.**

2. Meqë $c^2 = a^2 + b^2$ kemi se $c = 5$.

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}$; $\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$. **4.** a) $c = 17$; $\sin\alpha = \frac{15}{17}$; $\cos\alpha = \frac{8}{17}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{15}$;

$\sin\beta = \frac{8}{17}$; $\cos\beta = \frac{15}{17}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{8}{15}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{15}{8}$.

5. a) $b = 12$; $\sin\alpha = \frac{12}{37}$; $\cos\alpha = \frac{35}{37}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{35}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{35}{12}$.

6. a) $d = 10$; $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$;

b) $\sin\beta = \frac{4}{5}$; $\cos\beta = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$;

$\operatorname{ctg}\beta = \frac{3}{4}$.

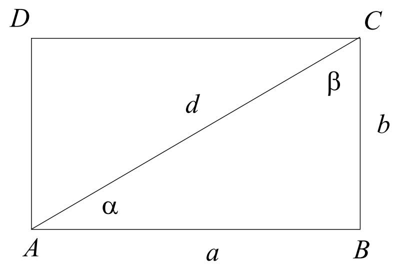

Fig. 18

7. $a = 1$; $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

8. a) Nga teorema e Pitagorës merret

$$a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 10.$$

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$;

$\sin\beta = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

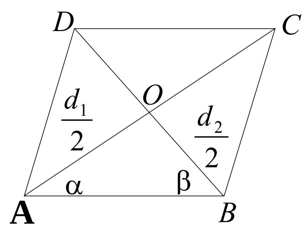

Fig. 19

9. Meqë $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ kemi $\frac{1}{2} = \frac{16}{c} \Rightarrow c = 32$ cm.

Tani $a = \sqrt{c^2 - b^2} = 16\sqrt{3}$ cm.

10. Le të jetë $BD = x$. Nga zbatimi i teoremës së Pitagorës në trekëndëshin ABD merret $x = a\sqrt{2}$. Le të shënojmë me y diagonalen e kubit. Nga zbatimi i teoremës së Pitagorës në trekëndëshin BDH merret $y = a\sqrt{3}$.

Atëherë

$$\sin\alpha = \frac{a}{y} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{y} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{x} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{a} = \sqrt{2}.$$

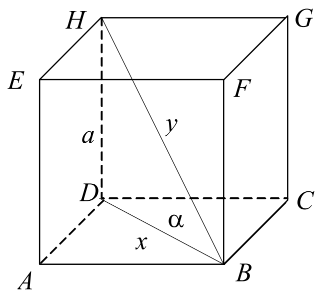

Fig. 20

11. Meqë $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ dhe $H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

a) $$\sin\alpha = \frac{H}{h} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3};\ \cos\alpha = \frac{\frac{1}{3}h}{h} = \frac{1}{3};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{\frac{1}{3}h} = 2\sqrt{2};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\frac{1}{3}h}{H} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

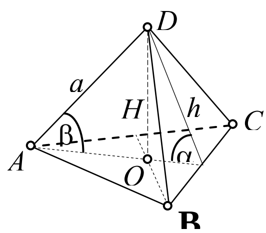

Fig. 21

b) $$\sin\beta = \frac{H}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}};\ \cos\beta = \frac{\frac{2}{3}h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H}{\frac{2}{3}h} = \sqrt{2};\ \operatorname{ctg}\beta = \frac{\frac{2}{3}h}{H} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

12. Kateta tjetër është $\sqrt{a}$. Pra

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{a^2-a}}{a};\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{a}}{a};\qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{a^2-a}}{\sqrt{a}};\ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2-a}}.$$

13. Le të jetë $b = 24$. Atëherë $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{24} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 18;\ c = 30.$

14. Le të jetë ABC trekëndësh i çfarëdoshëm. Le të jetë x këndi pranë kulmit $B\,(AB = c;\ AC = b;\ BC = a)$. Nga pika C lëshojmë normalen në AB. Le të jetë D pikëprerja e normales me AB. Shënojmë $CD = u;\ BD = v$. Nga trekëndëshi BCD merret:

$$\left.\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{u}{a}\\[2em] \cos x = \dfrac{v}{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin^2 x = \dfrac{u^2}{a^2}\\[2em] \cos^2 x = \dfrac{v^2}{a^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{u^2+v^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

sepse nga teorema e Pitagorës $u^2 + v^2 = a^2$.

Shënim: Relacioni $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (vlen për çdo $x \in R$) paraqet identitetin themelor në trigonometri.

16. $a = 17.63;\ r = 12.14$

1.3 FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE TË DISA KËNDEVE TË SPECIALE

1. a) 3; b) $\frac{3\sqrt{2}+5}{2}$; c) $5\sqrt{3}$; d) $2\sqrt{3}$;

e) 0; f) 2. g) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. a) $5\sqrt{3}$; b) 1; c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \sqrt{3}$.

3. a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+1}$; b) 0; c) $2+\sqrt{3}$; d) $\sqrt{3}-1$;

e) 0; f) $\dfrac{16}{5}$; g) $-\dfrac{1}{2}$.

4. a) $-\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{16\sqrt{3}}{15}$; c) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$;

d) $3+2\sqrt{2}$; e) $\dfrac{(57+24\sqrt{3})}{26}$.

5. $1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3} \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{4} = x\cdot\dfrac{2}{4}\sqrt{3} \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

6. 6.

1.4 FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE TË KËNDEVE KOMPLEMENTARE

1. a) $\cos 62^\circ$; b) $\cos 41^\circ$; c) $\mathrm{tg}28^\circ$; d) $\mathrm{ctg}27^\circ$;

e) $\cos(40^\circ-\alpha)=\cos(90^\circ-(50^\circ+\alpha))=\sin(50^\circ+\alpha)$;

f) $\sin(60^\circ-\alpha)$; g) $\mathrm{tg}(45^\circ-\alpha),\ \alpha<45^\circ$.

2. a) $\sin 80^\circ 15' = \sin(90^\circ-(9^\circ 45'))=\cos 9^\circ 45'$; b) $\sin 25^\circ$;

c) $\mathrm{ctg}44^\circ 30'$; d) $\mathrm{tg}1^\circ$.

3. a) $\sin\dfrac{\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\cos\dfrac{5\pi}{12}$; b) $\sin\dfrac{5\pi}{14}$;

c) $\mathrm{ctg}\dfrac{2\pi}{5}$; d) $\mathrm{tg}\dfrac{11\pi}{30}$.

4. a) Meqë nga $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\ \beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ atëherë

$$\frac{2\cos\beta}{\sin\alpha}=\frac{2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{\sin\alpha}=2;$$

b) 2. c) $\text{tg}\alpha$.

5. Meqë $\alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow \beta=90^\circ-\alpha$, pra

$$\frac{2-\text{ctg}\beta}{\text{tg}\alpha}-\frac{2+\text{tg}\alpha}{\text{ctg}\beta}+\frac{1-\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{1+\cos\beta}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{2-\text{ctg}(90^\circ-\alpha)}{\text{tg}\alpha}-\frac{2+\text{tg}\alpha}{\text{ctg}(90^\circ-\alpha)}+\frac{1-\sin\alpha}{\cos(90^\circ-\alpha)}+\frac{1+\cos(90^\circ-\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{2-\text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha}-\frac{2+\text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha}+\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}=-2+\frac{2}{\sin\alpha}.$$

6. a) Meqë $\sin 48^\circ=\cos 42^\circ$ kemi $\frac{2\cos 42^\circ+3\cos 42^\circ}{3\cos 42^\circ}=\frac{5}{3}$;

b) 2; c) 1.

7. b) Nga $\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$ atëherë

$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\sin\frac{\gamma}{2}$ gjë që duhej vërtetuar.

1.5 IDENTITETET THEMELORE TRIGONOMETRIKE

1. a) Nga $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ marrim se $\sin^2\alpha=\frac{144}{169}$ që d.m.th. se

$\sin\alpha=\frac{12}{13}$ ose $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$. Meqë $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ rrjedhë se $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.

Pastaj $\text{tg}\alpha=\frac{12}{5}$, $\text{ctg}\alpha=\frac{5}{12}$;

b) $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\text{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\text{ctg}\alpha=2\sqrt{2}$.

2. a) Së pari gjejmë se $\text{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\alpha} = -\dfrac{4}{3}$.

Meqë $\cos^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \dfrac{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha + 1}$, kemi:

$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{\left(\dfrac{-3}{4}\right)^2 + 1} = \dfrac{16}{25}$, pra $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ ose $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$. Meqë $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ kemi se $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$. Kurse, meqë $\text{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, kemi

$\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tg}\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Pra, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\text{ctg}\alpha = -\dfrac{4}{3}$.

3. $\text{tg}15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, $\sin 15^\circ = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\cos 15^\circ = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

4. a) $\cos\alpha = \dfrac{9}{41}$, $\text{tg}\alpha = \dfrac{40}{9}$, $\text{ctg}\alpha = \dfrac{9}{40}$;

b) $\sin\alpha = \dfrac{24}{25}$, $\text{tg}\alpha = \dfrac{24}{7}$, $\text{ctg}\alpha = \dfrac{7}{24}$;

c) $\text{ctg}\alpha = \dfrac{21}{20}$, $\sin\alpha = \dfrac{20}{29}$, $\cos\alpha = \dfrac{21}{29}$;

d) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}$, $\cos\alpha = \dfrac{m\sqrt{m^2+1}}{m^2+1}$, $\text{tg}\alpha = \dfrac{1}{m}$;

e) $\cos\alpha = \dfrac{20}{29}$, $\text{tg}\alpha = \dfrac{21}{20}$, $\text{ctg}\alpha = \dfrac{20}{21}$;

f) $\sin\alpha = \dfrac{221}{229}$, $\text{tg}\alpha = \dfrac{221}{60}$, $\text{ctg}\alpha = \dfrac{60}{221}$;

g) $\sin\alpha = \dfrac{7}{25}$, $\cos\alpha = \dfrac{24}{25}$, $\text{ctg}\alpha = \dfrac{24}{7}$;

h) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{35}$, $\sin\alpha = \frac{12}{37}$, $\cos\alpha = \frac{35}{37}$.

5. a) $\cos x = \pm\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{tg}x = \pm\frac{2t}{1-t^2}$, $\mathrm{ctg}x = \pm\frac{1-t^2}{2t}$;

b) $\sin x = \pm\frac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{tg}x = \pm\frac{2t}{1-t^2}$, $\mathrm{ctg}x = \pm\frac{1-t^2}{2t}$;

c) $\cos x = \pm\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}$, $\mathrm{tg}x = \pm\frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$, $\mathrm{ctg}x = \pm\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}$.

6. $$\frac{(1-\sin^2 x)-\sin^2 x(\sqrt{1-\sin^2 x})+\sin^4 x}{(1-\sin^2 x)\sqrt{1-\sin^2 x}}.$$

9. a) Le të jetë $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, atëherë $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.\ \text{Pra}\ \frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 7.$$

10. Nga $\cos^2 15^\circ = 1-\sin^2 15^\circ$ fitojmë $\cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

11. a) Që sinusi dhe kosinusi i këndit të dhënë α të jenë njëkohësisht $\frac{1}{6}$

dhe $\frac{5}{6}$ duhet të vlejë $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$,

pra se $\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1^2+5^2}{6^2} = \frac{26}{36} \neq 1$;

b) Po; c) Jo.

12. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = (1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \sin^2\alpha$, $\alpha \neq k\pi$ për $k \in Z$.

Shënim: Identiteti i dhënë dhe identitetet vijuese vlejnë në zonën e përkufizimit të funksioneve të dhëna, për të cilën do të mësohet më vonë. Gjatë vërtetimit të identiteteve, në disa raste do të tregojmë për të cilat vlera të këndit të dhënë vlen identiteti e në disa raste kjo nuk do të ceket fare, por nënkuptohet se ato vlejnë vetëm në zonën e përkufizimit.

15. $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha$
$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$

18. $$\frac{\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}+\frac{\sin\alpha}{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$$
$$=\frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+\frac{\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\cos^3\alpha+\sin^3\alpha$$
$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha).$$

20. $$\frac{\sin x\cdot\operatorname{tg}x+\sin y\cdot\operatorname{tg}y}{\cos x+\cos y}=\frac{\sin x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}+\sin y\cdot\dfrac{\sin y}{\cos y}}{\cos x+\cos y}$$
$$=\frac{\sin^2x\cdot\cos y+\sin^2y\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos y(\cos x+\cos y)}=\frac{(1-\cos^2x)\cos y+(1-\cos^2y)\cos x}{\cos x\cdot\cos y(\cos x+\sin y)}$$
$$=\frac{\cos y-\cos y\cdot\cos^2x+\cos x-\cos^2y\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos y(\cos x+\cos y)}$$
$$=\frac{\cos x+\cos y-\cos x\cdot\cos y(\cos x+\cos y)}{\cos x\cdot\cos y(\cos x+\cos y)}=\frac{1}{\cos x\cdot\cos y}-1.$$

24. $$\frac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}-2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha+1$$
$$=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}}-2+1$$
$$=1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}}-1$$

$$= \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 1 = 0 .$$

28. $$\left(\operatorname{tg}^3\alpha + \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right) : \left(\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{ctg}^3\alpha\right)$$

$$= \left(\frac{\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha + 1 - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right) : \left(\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2\alpha + 1 - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 - \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha + 1 - \operatorname{tg}\alpha) \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 1 - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$$

$$= \operatorname{tg}^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha + 1 - \operatorname{tg}\alpha) \cdot \frac{1}{\frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}} = \operatorname{tg}^4\alpha.$$

31. $$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + 1}{\operatorname{tg}\beta}}{\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

35. Transformojmë anën e majtë

$$1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)}{\cos\alpha}, \quad \text{ku } \alpha \neq \frac{k\pi}{2} + k\pi, \text{ për } k \in Z .$$

Transformojmë tani anën e djathtë

$$(1 + \cos\alpha)(1 + \operatorname{tg}\alpha) = (1 + \cos\alpha)\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$= \frac{(1 + \cos\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ për } k \in Z.$$

40. b) Anën e majtë e transformojmë në formën

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}} - \sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}$$

$$= \frac{|1+\sin\alpha|}{|\cos\alpha|} - \frac{|1-\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}.$$

Që kjo shprehje të jetë e barabartë me $2\text{tg}\alpha$ duhet që

$$\begin{cases} 1+\sin\alpha > 0 \\ 1-\sin\alpha > 0. \\ \quad \cos\alpha > 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Vërtetë, nga kushtet (*) kemi

$$\frac{|1+\sin\alpha|}{|\cos\alpha|} - \frac{|1-\sin\alpha|}{|\cos\alpha|} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\text{tg}\alpha.$$

41. Anën e majtë e transformojmë

$$\sin x(\sqrt{1+\text{tg}^2 x} - \sin x) + \cos x(\sqrt{1+\text{tg}^2 x} - \cos x)$$

$$= \sin x\left(\sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} - \sin x\right) + \cos x\left(\sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}} - \cos x\right)$$

$$= \sin x\left(\frac{1}{|\cos x|} - \sin x\right) + \cos\left(\frac{1}{|\cos x|} - \cos x\right).$$

Tani, meqë $\cos x > 0$ nga përkufizimi i vlerës absolute kemi se $|\cos x| = \cos x$.

Prandaj,

$$\sin x\left(\frac{1}{\cos x} - \sin x\right) + \cos x\left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)$$

$$= \text{tg}x - \sin^2 x + 1 - \cos^2 x = \text{tg}x + 1 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = \text{tg}x.$$

42. a) Meqë $\text{tg}x = 2$, kemi se $\sin x = 2\cos x$.

Prandaj $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^3 x - \cos^3 x} = \dfrac{(2\cos x)^3 + \cos^3 x}{(2\cos x)^3 - \cos^3 x} = \dfrac{9\cos^3 x}{7\cos^3 x} = \dfrac{9}{7}.$

b) $\dfrac{21}{40}.$

43. a) -1.

b) $\log_4 \sin^2 \dfrac{\pi}{6} + \log_4 \sin 90^\circ = \log_4 \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \log_4 1 = \log_4 \dfrac{1}{4} + 0 = -1.$

44. a) Detyra mund të zgjidhet si në detyrën 42, por do ta zgjidhim me një mënyrë tjetër

$$A=\frac{\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x+2(\sin^2 x+\cos^2 x)}{3\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x-4(\sin^2 x+\cos^2 x)}$$

$$=\frac{\text{tg}^2x+\text{tg}x+2(\text{tg}^2x+1)}{3\text{tg}x+1-4(\text{tg}^2x+1)}=\frac{3^2+3+2(3^2+1)}{3\cdot 3+1-4(3^2+1)}=-\frac{16}{15};$$

b) $\frac{25}{19}$; c) $\frac{4}{3}$.

45. Nga $\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha=a$ ku $|a|\geq 2$ dhe $\text{tg}\alpha=\frac{1}{\text{ctg}\alpha}$ merret:

a) $\frac{1}{\text{ctg}\alpha}+\text{ctg}\alpha=a$

$\text{ctg}^2\alpha-a\text{ctg}\alpha+1=0$

$$\text{ctg}\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\vee\text{ctg}\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$$

Prej nga $\text{tg}\alpha=\frac{1}{\text{ctg}\alpha}=\frac{2}{a+\sqrt{a^2-4}}\vee\text{tg}\alpha=\frac{2}{a-\sqrt{a^2-4}}$.

46. a) Ngase $f(x)=\sin x\cos x$ kemi se

$f(\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ kurse $f(-\alpha)=\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)=-\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Pra

$$f(\alpha)-f(-\alpha)+\frac{f(\alpha)}{f(-\alpha)}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha-(-\sin\alpha\cdot\cos\alpha)+\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-1.$

47. a) Barazimi i parë i sistemit ngritet në katror. Merret

$\sin^2 t+\cos^2 t+2\sin t\cdot\cos t=m^2$.

Shfrytëzojmë faktin se

$\sin^2 t+\cos^2 t=1,$ prej nga marrim se

$\sin t\cdot\cos t=\frac{m^2-1}{2}.$

Barazimin e dytë e shkruajmë në trajtën

$\sin^3 t+\cos^3 t=(\sin t+\cos t)(\sin^2 t-\sin t\cdot\cos t+\cos^2 t)=k$ ose

$$m\left(1-\frac{m^2-1}{2}\right)=k\Rightarrow m^3-3m+2k=0;$$

b) Sistemin e shkruajmë në trajtën

$$\begin{cases}\sin t=\dfrac{x}{a}\\[2mm] \cos t=\dfrac{y}{a}\end{cases}.$$

E ngrisim në katror dhe i mbledhim anë për anë $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;$

c) $(x-p)^2+(y-q)^2=r.^2$

50. Pas transformimit të thyesës së dhënë marrim $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}.$

Meqë të dy thyesat janë pozitive atëherë edhe prodhimi i tyre është pozitiv.

Shënim: Kjo vlen për zonën e përkufizimit të funksioneve të dhëna (shih vërejtjen në detyrën 12).

52. Barazimin e parë dhe të dytë i pjesëtojmë me $\cos^2 x$ dhe $\cos^2 y$, përkatësisht dhe marrim

$$\begin{cases}a\mathrm{tg}^2 x+b=\mathrm{tg}^2 x+1\\ a\mathrm{tg}^2 y+b=\mathrm{tg}^2 y+1\end{cases}\sim\begin{cases}(a-1)\mathrm{tg}^2 x=1-b & (1)\\ (b-1)\mathrm{tg}^2 y=1-a & (2)\end{cases}$$

Sikur $a = 1$ atëherë në (1) ose (2) marrim se edhe $b = 1$ gjë që e kundërshton supozimin tonë se $a \neq b$. Prandaj mbetet që $a \neq 1$.

Në anën tjetër në barazimin e tretë duhet që $\cos x \neq 0 \wedge \cos y \neq 0$.

Tani, duke pjesëtuar barazimin e (1) me (2) marrim

$$\left(\frac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}y}\right)^2=\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2. \qquad (3)$$

Nga barazimi (3) kemi:

$$\left(\frac{\text{tg}x}{\text{tg}y}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}.$$

Pra $\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}$ prej nga dallojmë rastet:

1) $\frac{1-b}{1-a}=\frac{b}{a}$ dhe 2) $\frac{1-b}{1-a}=-\frac{b}{a}$.

1) Sikur $\frac{1-b}{1-a}=\frac{b}{a}$ do të fitonim $a = b$ gjë që është në kundërshtim me supozimin se $a \neq b$.

2) Sikur $\frac{1-b}{1-a}=-\frac{b}{a}$ do të marrim $a+b=2ab$ gjë që duhej treguar.

55. Duke ngritur në katror barazimin

$\text{tg}^2x+\text{ctg}^2x=p$

kemi

$\text{tg}^4x+2\text{tg}^2x\cdot\text{ctg}^2\text{x}+\text{ctg}^4x=p^2$.

Meqë $\text{tg}x\cdot\text{ctg}x=1$ si dhe nga kushti i detyrës $\text{tg}^4x+\text{ctg}^4x=q$ kemi $q+2=p^2 \Rightarrow p^2-q=2$, gjë që duhej vërtetuar.

56. a) Nga relacioni i dhënë kemi $\cos\alpha=\sqrt{2}-\sin\alpha$. Pastaj nga $\sin^2\alpha+(\sqrt{2}-\sin\alpha)^2=1$ marrim se $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

57. $3\sin x=2(1-\sin^2x)\sim 2\sin^2x+3\sin x-2=0$ prej nga marrim $\sin x=\frac{1}{2}\vee\sin x=-2$.

Duke ditur se $-1<\sin x<1$ marrim se barazimi $\sin x=-2$ është i pamundur, prandaj kemi $\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=30^\circ$.

60. a) Shprehja nuk mund të thjeshtohet për ato vlera të α - së për të cilat $\sin\alpha=0$, pra për $\alpha=k\pi$, $k\in Z$.

Për $\sin\alpha\neq 0$ pas thjeshtimit merret $\cos\alpha$.

b) Thyesën e dhënë e shkruajmë në trajtën $\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}$. Prej këtej shohim se:

$$\cos\alpha \neq 0 \wedge 1-\cos\alpha \neq 0 \text{, pra}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \wedge \alpha \neq k\pi, k \in Z.$$

Përfundimisht, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}$.

61. $$\frac{\sin^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}-\frac{1}{a+b}=0$$

$$\frac{(1-\cos^2\alpha)^2}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}-\frac{1}{a+b}=0$$

$$(a+b)\cos^4\alpha-2b\cdot\cos^2\alpha+\frac{b^2}{a+b}=0$$

prej nga merret:

$$\cos^2\alpha=\frac{b}{a+b},\ \sin^2\alpha=\frac{a}{a+b}$$

Prandaj $\cos^8\alpha=\frac{b^4}{(a+b)^4}$, $\sin^8\alpha=\frac{a^4}{(a+b)^4}$. Pra

$$\frac{\sin^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{a^4}{a^3(a+b)^4}+\frac{b^4}{b^3(a+b)^4}=\frac{a}{(a+b)^4}+\frac{b}{(a+b)^4}=$$

$\frac{a+b}{(a+b)^4}=\frac{1}{(a+b)^3}$, gjë që duhej vërtetuar.

62. – 1.

63. *Udhëzim*: Të shfrytëzohen formulat për këndet komplementare.

1.6 SHNDËRRIMI I FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE TË KËNDIT TË ÇFARËDOSHËM NË FUNKSIONE TRIGONOMETRIKE TË KËNDIT TË NGUSHTË

1. $\cos(-180^\circ)+\text{ctg}(-45^\circ)-\sin(-90^\circ)-\sin^2(-120^\circ)$

$$= \cos 180^\circ - \text{ctg} 45^\circ + \sin 90^\circ - (\sin 120^\circ)^2 = -\frac{7}{4}.$$

2. a) $\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

b) $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$

c) $\text{tg}(\cos 120^\circ) = \text{tg}(\cos(180^\circ - 60^\circ)) = \text{tg}(-\cos 60^\circ) = -\text{tg}\frac{1}{2}.$

3. a) $\cos 0{,}3424 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 0{,}3424\right) = \sin 1{,}2284 = \sin 57^\circ 18';$

b) $\sin 480^\circ = \sin(360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

4. a) $\text{tg}\frac{7\pi}{6} = \text{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \text{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3};$

b) $\sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$

c) $\text{ctg}\frac{5\pi}{3} = \text{ctg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\text{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

7. a) $\sin \frac{9\pi}{4} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$

b) $\cos(8\pi + 3) = \cos(2 \cdot 4\pi + 3) = \cos 3;$

c) $\sin(8\pi - 3) = -\sin 3.$

9. a) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6};$ b) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}.$

10. $\sin 1020^\circ + \cos 1020^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ - 60^\circ) + \cos(3 \cdot 360^\circ - 60^\circ)$

$$= -\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

11. $\sin^2\frac{37\pi}{6}-\cos^2\frac{37\pi}{6}=\sin^2\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)-\cos^2\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}.$

12. $\frac{10}{3}$.

13. a) $-\frac{1}{2}(3+\sqrt{2})$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 1; d) 1.

14. $\sin^2\alpha+\cos\alpha$.

16. a) 1; b) $\cos x(1+\sin x)$.

17. a) 0. c) $\frac{2a^2}{\sin\alpha},\ \alpha\neq k\pi,\ k\in Z$.

22. a) $\frac{\sin 750^\circ\cos 390^\circ\,\mathrm{tg}1140^\circ}{\mathrm{ctg}405^\circ\sin 1860^\circ\cos 780^\circ}$

$=\frac{\sin(2\cdot 360^\circ+30^\circ)\cos(360^\circ+30^\circ)\mathrm{tg}(3\cdot 360^\circ+60^\circ)}{\mathrm{ctg}(360^\circ+45^\circ)\sin(5\cdot 360^\circ+60^\circ)\cos(2\cdot 360^\circ+60^\circ)}$

$=\frac{\sin 30^\circ\cos 30^\circ\,\mathrm{tg}60^\circ}{\mathrm{ctg}45^\circ\sin 60^\circ\cos 60^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}}{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{3}.$

b) 1.

24. Nga kushti $\alpha+\beta+\gamma+\delta=k\pi$ kemi $\alpha=k\pi-\beta-\gamma-\delta$.

Ana e majtë transformohet në trajtën

$\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)=\sin(k\pi-\beta-\gamma-\delta+\gamma)\sin(k\pi-\beta-\gamma-\delta+\delta)$

$\sin(k\pi-\beta-\delta)\sin(k\pi-\beta-\gamma)=\sin(\beta+\delta)\sin(\beta+\gamma).$

25. Në mënyrë analoge me detyrën paraprake.

26. a) 0;

b) Dallojmë rastet

I) Për $n = 2k$ (n - çift)

$$\cos n\pi = \cos 2k\pi = 1.$$

II) Për $n = 2k + 1$ ($n -$ tek)

$$\cos n\pi = \cos(2k\pi + \pi) = \cos\pi = -1.$$

Pra

$$\cos n\pi = \begin{cases} 1, & n - \text{çift} \\ -1, & n - \text{tek} \end{cases};$$

c) $\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)\pi = \begin{cases} 1, & n - \text{çift} \\ -1, & n - \text{tek} \end{cases};$

d) 0; e) $\sin n\pi + \cos n\pi = \cos n\pi$ rasti b); f) rasti c).

27. 0.