V. TRIGONOMETRIA NË GARA

5.1 TRIGONOMETRIA NË GARA

1. Në trekëndëshin e dhënë dihen këto madhësi:

$$a - c = m = 1.2;\ b = 4.5;\ \gamma = 67.5^\circ .$$

Të konstruktohet dhe të zgjidhet trekëndëshi.

(Garat Republikane të Matematikës, Slloveni – 1950)

2. Të caktohen këndet e ngushtë të trekëndëshit kënddrejtë te i cili shuma e kateteve është katër herë më e madhe se lartësia e ndërtuar në hipotenuzë.

(Garat Republikane të Matematikës, Slloveni – 1958)

3. Të zgjidhet barazimi

$$\sin^{10}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos^{10}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = a .$$

Pastaj të caktohen zgjidhjet për $a = 1$.

(Garat Republikane të Matematikës, Slloveni – 1962)

4. Rrënjët e barazimit $ax^2 + bx + c = 0$, me koeficientë real a, b, c janë $x_1 = \mathrm{tg}\alpha;\ x_2 = \mathrm{tg}\beta$. Njehsoni vlerën e shprehjes

$$a\sin^2(\alpha + \beta) + b\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) + c\cos^2(\alpha + \beta) .$$

(Garat Republikane të Matematikës, Slloveni – 1972)

5. Të zgjidhet barazimi

$$\sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) = 1 .$$

(Garat Republikane të Matematikës, Slloveni – 1972)

6. Të paraqitet grafikisht funksioni

$$f(x) = \arcsin\sqrt{x} + \arcsin\sqrt{1-x}\ .$$

(Garat Republikane të Matematikës, Slloveni – 1982)

7. Të caktohen të gjitha zgjidhjet reale x, y të barazimit

$$\log_2(\cos^2 xy + \frac{1}{\cos^2 xy}) = \frac{1}{y^2 - 2y + 2}\ .$$

(Garat Regjionale të Matematikës, Slloveni –1996)

8. Për çfarë vlera të α -së dhe të x-it vlen

$$\log_2 x + \log_x 2 - 2\sin\alpha \le 0\,?$$

(Garat Republikane të Matematikës, Bosnjë-Hercegovinë – 1964)

9. Caktoni numrin e zgjidhjeve të barazimit

$$\sin x = \frac{x}{n}$$

në varësi të numrit n, ku n është numër natyror i ndryshëm nga 1.

(Garat Republikane të Matematikës, Bosnjë-Hercegovinë – 1968)

10. Vërtetoni se

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) \le \frac{3}{2}$$

për çdo x, y. Për çfarë vlera të x-it dhe y-it vlen barazimi?

(Garat Republikane të Matematikës, Bosnjë-Hercegovinë – 1969)

11. Meset e brinjëve të n-këndëshit formojnë një n-këndësh tjetër.

a) Caktoni raportin e syprinave të tyre;

b) Nëse vazhdohet procesi i formimit të n-këndëshit në mënyrën e sipërpërmendur, caktoni n-in për të cilin vlen:

Shuma e syprinave të të gjithë n-këndëshave është katër herë më e madhe se syprina e n-këndëshit të parë.

(Garat Republikane të Matematikës, Bosnjë-Hercegovinë – 1970)

12. Të paraqitet grafikisht funksioni $y = \dfrac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$.

(Garat Republikane të Matematikës, Bosnjë-Hercegovinë – 1971)

13. Vërtetoni se e mesmja aritmetike e numrave $n\sin n^\circ$ $(n = 2,4,6,\ldots,180)$ është $\text{ctg}1^\circ$.

(Olimpiada e Matematikës, SHBA – 1996)

14. Vërtetoni se nëse $0 < x < \frac{\pi}{2}$ atëherë

$$\sec^6 x + \text{cosec}^6 x + (\sec^6 x)(\text{cosec}^6 x) \geq 80$$

(Kërkimi i talentëve të matematikës në SHBA, 1998 – 1999)

15. Në trekëndëshin *ABC*, $AC > BC$, *CM* është mediana dhe *CH* është lartësia e lëshuar nga pika *C*, siç shihet në figurën e mëposhtme.

Përcaktoni këndin $\angle MCH$ nëse $\angle ACM$ dhe $\angle BCH$ janë 17°.

(Kërkimi i talentëve të matematikës në SHBA, 1999 – 2000)

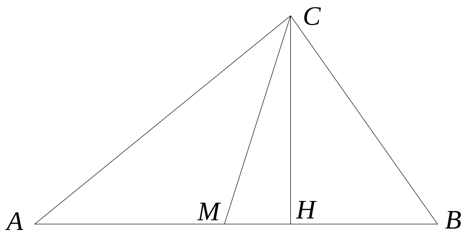

Fig. 12

16. Gjashtëkëndëshi *RSTUVW* është konstruktuar duke ndërtuar katrorët në katetet *p*, *q* dhe në hipotenuzën e trekëndëshit kënddrejtë dhe pastaj janë bashkuar kulmet, siç shihet nga figura.

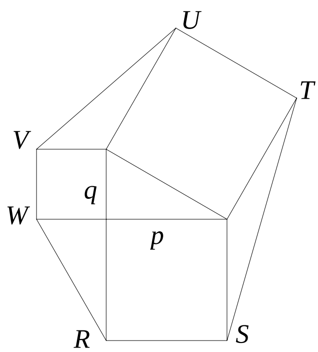

Fig. 13

Nëse dihet se *p*, *q* janë numra të plotë të tillë që $p > q$ dhe se syprina e sipërfaqes *RSTUVW* është 1922, përcaktoni numrat *p*, *q*.

(Kërkimi i talentëve të matematikës në SHBA, 2000 – 2001)

17. Supozojmë se për disa vlera të këndit x, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ vlen $\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{1}{3}$.

Përcaktoni $\frac{\sin 3x}{\sin x}$ për të njëjtat vlera të x-it.

(Kërkimi i talentëve të matematikës në SHBA, 2001 – 2002)

18. Le të jetë dhënë trekëndëshi ABC dhe le të jetë P pikë në AB. Supozojmë se $\angle BAC = 70^\circ$; $\angle APC = 60^\circ$; $AC = \sqrt{3}$ dhe $PB = 1.$ Vërtetoni se ABC është trekëndësh barakrahës.

(Garat regjionale të matematikës, Virgjinia, – 1998)

19. Nga figura, vërtetoni se shuma e sipërfaqeve në katrorët e jashtëm (I, II dhe III) është e barabartë me trefishin e shumës së sipërfaqeve të tre katrorëve të brendshëm (IV, V, VI).

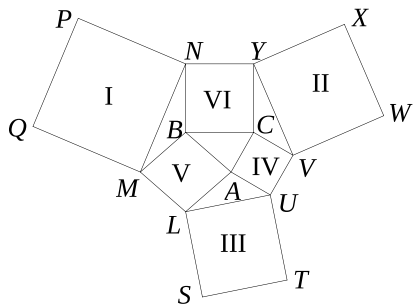

Fig. 14

(Olimpiada e Matematikës, Holandë – 1992)

20. Në shumëkëndëshin e rregullt $A_1, A_2, ..., A_n$ vlen $\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}$. Të caktohet n-i.

(Garat Republikane të Matematikës, Serbi, – 1976)

21. Caktoni vlerën maksimale të raportit të vëllimit të sferës dhe konit të jashtëshkruar në të.

(Garat Federative të Matematikës, Jugosllavi – 1976)

22. Rrethi i brendashkruar në trekëndëshin kënddrejtë me hipotenuzë c i takon brinjët e këndit të ngushtë në pikat M dhe N. Vërtetoni se $MN \le \frac{2\sqrt{3}}{9}c$.

(Garat Federative të Matematikës, Jugosllavi – 1977)

23. Sa zgjidhje ka sistemi i barazimeve

$$\cos x_1 = x_2$$
$$\cos x_2 = x_3$$
$$\ldots$$
$$\cos x_{n-1} = x_n$$
$$\cos x_n = x_1\ ?$$

(Garat Republikane të Matematikës, Serbi – 1978)

24. Të tregohet se nëse për këndet e trekëndëshit α, β dhe γ vlen

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sqrt{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$$

atëherë së paku njëri nga këndet α, β dhe γ është baraz me $\frac{\pi}{3}$.

(Garat Republikane të Matematikës, Serbi – 1979)

25. Le të jetë *ABC* trekëndësh barakrahës ashtu që $AB = AC$. Supozojmë se simetralja e këndit pranë kulmit *B* e pret brinjën *AC* në pikën *D* dhe se vlen $BC = BD + AD$. Përcaktoni këndin pranë kulmit *A*.

(Olimpiada e Matematikës, Kanada – 1996)

5.2. DETYRA PLOTËSUESE TË GARAVE

1. Le të jetë dhënë trekëndëshi *ABC* me brinjët *a*, *b*, *c*. Simetralja e këndit *C* e pret *AB* në *D*. Vërtetoni se gjatësia *CD* është

$$\frac{2ab\cos\frac{c}{2}}{a+b}.$$

(Olimpiada e Matematikës, Kanada – 1969)

2. Në trekëndëshin *ABC* medianet në brinjët *AB* dhe *AC* janë normale. Vërtetoni se $\operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C \geq \frac{2}{3}$.

(Olimpiada e Matematikës, Kanda – 1993)

3. Pika *O* i takon brendisë së paralelogramit *ABCD* ashtu që $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$. Vërtetoni se $\angle OBC = \angle ODC$.

(Olimpiada e Matematikës, Kanada – 1997)

4. Drejtëza l e tangjenton rrethin S në pikën A; B dhe C janë pika të drejtëzës l dhe janë në anë të kundërta të A-së, kurse tangjentet tjera të rrethit S, të ndërtuara nga pikat B, C priten në pikën P. Nëse $|AB|\cdot|AC|$ është konstant, caktoni vendin gjeometrik të pikave P.

(Olimpiada e 6-të e Matematikës, Irlandë – 1993)

5. Le të jetë x-numër real i tillë që $0 < x < \pi$. Vërtetoni se për çdo numër natyror n shuma

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{6} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

është pozitive.

(Olimpiada e 6-të e Matematikës, Irlandë – 1993)

6. Le të jetë dhënë pesëkëndëshi i rregullt $ABCDE$, brinjët e të cilit kanë gjatësinë 1. Le të jetë F mesi i AB dhe G, H le të jenë pika në brinjët CD dhe DE, përkatësisht, ashtu që $\angle GFD = \angle HFD = 30^\circ$. Vërtetoni se trekëndëshi GFH është barabrinjës. Në trekëndëshin GFH është brendashkruar katrori njëra brinjë e të cilit shtrihet në brinjën GH. Vërtetoni se FG ka gjatësinë

$$t = \frac{2\cos 18^\circ (\cos 36^\circ)^2}{\cos 6^\circ}$$

dhe se brinja e katrorit është $\dfrac{t\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

(Olimpiada e 13-të e Matematikës, Irlandë – 2000)

7. Është dhënë n-këndëshi me perimetër 4. Me r_n shënojmë distancën prej qendrës deri te kulmi i n-këndëshit dhe me a_n distancën prej qendrës deri te brinja.

a) Njehsoni a_4, r_4, a_8, r_8.

b) Interpretoni a_2 dhe r_2.

c) Vërtetoni se $a_{2n} = \frac{1}{2}(a_n + r_n)$ dhe $r_{2n} = \sqrt{a_{2n} \cdot r_n}$.

(Olimpiada e Matematikës, Holandë – 1992)

8. Vlen $\cos x = \cos y$ dhe $\sin x = -\sin y$. Vërtetoni se

$$\sin 1994x + \cos 1994y = 0.$$

(Olimpiada e 44-të Matematikës, Lituani – 1994)

9. Le të jenë a, b, c, d numra real nga intervali $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ të tillë që

$$\sin a+\sin b+\sin c+\sin d=1$$

dhe

$$\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c+\cos 2d\geq\frac{10}{3}.$$

Vërtetoni se $a,b,c,d\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$.

(Olimpiada e 2-të Ballkanike e Matematikës, Bullgari – 1985)

10. Caktoni vlerën e raportit $\frac{AC}{BC}$ nëse në trekëndëshin ABC plotësohet relacioni $\sin^{23}\frac{A}{2}\cdot\cos^{48}\frac{B}{2}=\sin^{23}\frac{B}{2}\cdot\cos^{48}\frac{A}{2}$.

(Olimpiada e 4-të Ballkanike e Matematikës, Greqi – 1987)

11. Le të jetë ABC trekëndësh këndngushtë, dhe le të jenë M, N, P këmbëzat e normaleve të lëshuara nga qendra e rëndimit G e trekëndëshit ABC në brinjët AB, BC dhe CA, përkatësisht. Vërtetoni se

$$\frac{4}{27}<\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}}\leq\frac{1}{4}$$

ku $S_{\Delta MNP}$ është syprina e sipërfaqes së trekëndëshit MNP kurse $S_{\Delta ABC}$ është syprina e sipërfaqes së trekëndëshit ABC.

(Olimpiada e 16-të Ballkanike e Matematikës, ish RJ e Maqedonisë – 1997)

12. Le të jetë $F_r=x^r\sin rA+y^r\sin rB+z^r\sin rC$ ku x, y, z, A, B dhe C janë numra real dhe $A+B+C$ është shumëfish i plotë i π-së. Vërtetoni se nëse $F_1=F_2=0$, atëherë $F_r=0$ për çdo numër r të plotë pozitiv.

(Olimpiada e Matematikës, SHBA - 1980)

13. Vërtetoni se

$$\frac{1}{\cos 0^\circ\cdot\cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ}+\ldots+\frac{1}{\cos 88^\circ\cdot\cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}.$$

(Olimpiada e Matematikës, SHBA – 1992)

14. Le të jenë a_0, a_1, …, a_n numra nga intervali $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ të tillë që

$$\mathrm{tg}\left(a_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{tg}\left(a_1 - \frac{\pi}{4}\right) + ... + \mathrm{tg}\left(a_n - \frac{\pi}{4}\right) \geq n - 1.$$

Vërtetoni se

$$\mathrm{tg}a_0 \cdot \mathrm{tg}a_1 \cdot \cdots \cdot \mathrm{tg}a_n \geq n^{n+1}.$$

(Olimpiada e Matematikës, SHBA – 1998)

15. Le të jetë P pikë e brendshme e katrorit $ABCD$ ashtu që $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$ dhe $c^2 = a^2 + 2b^2$. Duke përdorur kompasin dhe vizoren dhe duke ditur se a, b, c janë madhësi të dhëna, konstruktoni katrorin kongruent me katrorin $ABCD$.

(Kërkimi i talentëve të matematikës në SHBA, 1999 – 2000)

16. Le të jenë A, B pika jodiametralisht të kundërta të rrethit dhe le të jetë C mesi i harkut më të vogël në mes të A-së dhe B-së. Le të jenë D, E dhe F pika të përcaktuara nga prerjet e tangjenteve të rrethit në pikat A, B dhe C. Vërtetoni se syprina e sipërfaqes së trekëndëshit DEF është më e madhe se gjysma e syprinës së sipërfaqes së trekëndëshit ABC.

(Kërkimi i talentëve të matematikës në SHBA, 2000 – 2001)

17. Vërtetoni se $\mathrm{ctg}10^\circ \cdot \mathrm{ctg}30^\circ \cdot \mathrm{ctg}50^\circ \cdot \mathrm{ctg}70^\circ = 3$.

(Kërkimi ndërkombëtar i talentëve të matematikës, Round – 23)

18. Brinjët e trekëndëshit a, b, c janë numra të plotë dhe plotësojnë kushtet: $a > b$ dhe këndi përballë brinjës c është 60°. Vërtetoni se a duhet të jetë numër i përbërë.

(Kërkimi ndërkombëtar i talentëve të matematikës, Round – 28)

19. Është dhënë rrethi me diametër AB, X është pikë e fiksuar në AB që gjendet në mes të A-së dhe B-së. Pika P e ndryshme nga pikat A dhe B i takon vijës rrethore. Vërtetoni se për të gjitha pozitat e mundshme të pikës P, raporti

$$\frac{\mathrm{tg}\angle APX}{\mathrm{tg}\angle PAX}$$

është konstant.

(Olimpiada e Matematikës, Britani e Madhe – 1999)

20. Le të jenë $a \le b \le c$ brinjët e trekëndëshit kënddrejtë dhe le të jetë p perimetri i tij. Tregoni se $p(p-c) = (p-a)(p-b) = S$ ku S është syprina e sipërfaqes së trekëndëshit.

(“Garat e matematikës “Baltic – Way” – 1992)

21. Vërtetoni se $\sin^3 18^\circ + \sin^2 18^\circ = \frac{1}{8}$.

(Garat e matematikës “Baltic – Way ” – 1995)

22. Le të jenë numrat α, β të tillë që $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ dhe le të jenë numrat γ dhe δ të definuar me kushtet:

(i) $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ dhe $\mathrm{tg}\gamma$ është e mesmja aritmetike e $\mathrm{tg}\alpha$ dhe $\mathrm{tg}\beta$.

(ii) $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ dhe $\frac{1}{\cos\delta}$ është e mesmja aritmetike e $\frac{1}{\cos\alpha}$ dhe $\frac{1}{\cos\beta}$.

Vërtetoni se $\gamma < \delta$.

(Garat e matematikës “Baltic – Way” – 1998)

23. Është dhënë numri natyror $n \ge 3$. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x_1 + 3\mathrm{ctg}x_1 = 2\mathrm{tg}x_2 \\ \mathrm{tg}x_2 + 3\mathrm{ctg}x_2 = 2\mathrm{tg}x_3 \\ \qquad \ldots \\ \mathrm{tg}x_n + 3\mathrm{ctg}x_n = 2\mathrm{tg}x_1 \end{cases}.$$

(Olimpiada e 44-të e Matematikës, Poloni – 1992)

24. Të përcaktohen të gjithë numrat e plotë pozitiv n, për të cilët barazimi $2\sin nx = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$ ka zgjidhje sipas x-it në bashkësinë e numrave real.

(Olimpiada e 47-të e Matematikës, Poloni – 1995)

25. Është dhënë trekëndëshi ABC në rrafsh, ashtu që $\angle CAB = \alpha > \frac{\pi}{2}$. Le të jetë PQ segment i tillë që pika A të jetë mesi i tij. Vërtetoni se

$$(BP + CQ) \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \ge BC.$$

(Olimpiada e 47-të e Matematikës, Poloni – 1995)

26. Është dhënë $n \geq 1, (n \in N)$. Të zgjidhet barazimi

$$| \mathrm{tg}^n x - \mathrm{ctg}^n x | = 2n \,| \mathrm{ctg} 2x | .$$

(Olimpiada e 49-të e Matematikës, Poloni – 1997)

27. Caktoni të gjitha zgjidhjet e barazimit

$$\sin k\theta = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi .$$

(Garat e matematikës APICS, – 1978)

28. Tregoni se $(\sin x + \cos x)^4 \leq 4$.

(Garat e matematikës APICS, – 1982)

29. Caktoni vlerën më të madhe dhe më të vogël të $3\sin^2 x + 2\sin 2x$.

(Garat e matematikës APICS, – 1986)

30. Njehsoni vlerën e shprehjes $\mathrm{tg} 20^\circ \cdot \mathrm{tg} 40^\circ \cdot \mathrm{tg} 60^\circ \cdot \mathrm{tg} 80^\circ$.

(Garat e matematikës APICS, – 1989)

31. Gjeni vlerën maksimale të $\mathrm{tg} A \cdot \cos B \cdot \sin C$, ku trekëndëshi ABC është trekëndësh këndngushtë në të cilin $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$.

(Garat e matematikës APICS, – 1991)

32. Le të jenë $a_1, a_2, ..., a_n$ numra të fiksuar real. Funksioni f është i definuar si vijon

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + ... + a_n \sin nx$$

Supozojmë se për çdo x vlen $| f(x) | \leq | \sin x |$.

Vërtetoni se $| a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + na_n | \leq 1$.

(Garat e matematikës APICS, – 1993)

33. Vërtetoni se $\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{7}\right) + \mathrm{tg}^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 21$.

(Garat e matematikës APICS, – 1994)

34. Vërtetoni se $\sin^2(x + \alpha) + \sin^2(x + \beta) - 2\cos(\alpha - \beta)\sin(x + \alpha)\sin(x + \beta)$ është funksion konstant i x-it.

(Garat e matematikës APICS, – 1999)

35. Të zgjidhet barazimi

$$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}2x = 2(1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \ldots)\sin 2x\,.$$

(Garat Republikane të Matematikës, Slloveni – 1963)

36. Njehsoni $\sin 2x$ nëse

$$\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} + \frac{1}{\mathrm{ctg}^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7\,.$$

Sa vlera të x-it ka në intervalin $(0^\circ, 360^\circ)$?

(Garat Republikane të Matematikës, Slloveni – 1965)

37. Nëse $0^\circ < x < 90^\circ$, tregoni se $7^7 \sin^4 x \cdot \cos^{10} x \le 12500$.

(Garat Republikane të Matematikës, Slloveni – 1972)

38. Gjashtëkëndëshi është brendashkruar në rrethin me rreze r. Dy brinjë të tij kanë gjatësinë 1, dy brinjë tjera kanë gjatësinë 2 dhe dy brinjët e fundit e kanë gjatësinë 3. Vërtetoni se r është rrënjë e barazimit

$$2r^3 - 7r - 3 = 0\,.$$

(Gara e VII e matematikës – "Nordic Contest")

39. Le të jetë *ABC* trekëndësh barabrinjës dhe Γ rrethi i brendashkruar në të. Nëse *D*, *E* janë pika në brinjët *AB* dhe *AC*, përkatësisht, të tilla që *DE* të jetë tangjente në Γ, tregoni se

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1\,.$$

(Olimpiada e 8-të Ibero-Amerikane e Matematikës – 1993)

40. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{aligned}\sin x + 2\sin(x+y+z) &= 0\\ \sin y + 3\sin(x+y+z) &= 0\\ \sin z + 4\sin(x+y+z) &= 0\end{aligned}$$

(Garat e 14-ta Nacionale të Matematikës, ish BRSS – 1980)

41. Këndet e ngushtë *a* dhe *b* plotësojnë kushtin $(\sin a)^2 + (\sin b)^2 = \sin(a+b)$. Vërtetoni se $a + b = \pi/2$.

(Garat e 17-ta Nacionale të Matematikës, ish BRSS – 1983)

42. Vërtetoni se për çdo dy numra pozitiv x, y dhe çdo numër real a, vlen

$$x^{(\sin a)^2} \cdot y^{(\cos a)^2} < x + y.$$

(Garat e 18-ta Nacionale të Matematikës, ish BRSS – 1984)

43. Vërtetoni se për çdo numër natyror n vlen

$$|\sin(1)| + |\sin(2)| + ... + |\sin(3n-1)| + |\sin(3n)| > \frac{8n}{5}.$$

(Garat e 20-ta Nacionale të Matematikës, ish BRSS – 1986)

44. Caktoni a të tillë që të gjithë numrat

$$\cos a,\ \cos 2a,\ \cos 4a, ...,\ \cos 2^n a$$

të jenë negativ.

(Garat e 21-ta Nacionale të Matematikës, ish BRSS –1987)

45. Sa zgjidhje reale ka barazimi

$$\sin(\sin(\sin(\sin(\sin x)))) = \frac{x}{3}.$$

(Olimpiada Matematike e Leningradid)

46. Të caktohen të gjitha vlerat e numrit x që i takojnë segmentit $[0, 1]$ që plotësojnë barazimin $\sin^4(\cos^4 3x) + \cos^4(\cos^4 3x) = 1$.

(Olimpiada e 63-të e Matematikës në Moskë, – 2000)

47. Të zgjidhet barazimi

$$(\sin x - (\sin x + \cos x)^{1/2})^{1/2} = \cos x.$$

(Olimpiada e 63-të e Matematikës në Moskë, – 2000)

48. Caktoni të gjitha zgjidhjet e barazimit $\sin \pi x \cdot \mathrm{tg} \pi x = \mathrm{tg} \pi x$ që i takojnë segmentit $[0, 2000]$.

(Olimpiada e 64-të e Matematikës në Moskë, – 2001)

49. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} 2y - x = \sin x - \sin 2y \\ \cos x + 5\sin y = 4 \end{cases}.$$

(Olimpiada e 64-të e Matematikës në Moskë, – 2001)

50. Rrënjët e barazimit kuadratik

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

(a, b, c janë koeficientët e dhënë) janë $x_1=\cos\alpha$, $x_2=\cos\beta$.

Të shprehen me anë të a,b,c koeficientët p, q të barazimit

$$y^2+py+q=0$$

nëse rrënjët e tij janë $y_1=\cos 2\alpha$, $y_2=\cos 2\beta$.

(Garat Republikane të Matematikës, Bosnjë Hercegovinë – 1963)

51. Vërtetoni se $\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x-2\operatorname{ctg}2x$, $\left(x\neq k\dfrac{\pi}{2}\right)$ dhe në bazë të saj tregoni se

$$\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-2\operatorname{ctg}2x,$$

ku $\left(x\neq k\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(Garat Republikane të Matematikës, Bosnjë Hercegovinë – 1965)

52. a) Vërtetoni identitetin

$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\alpha+60^\circ)+\operatorname{tg}(\alpha+120^\circ)=3\operatorname{tg}3\alpha.$

b) Njehsoni vlerën e shprehjes

$A=\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}5^\circ+\operatorname{tg}9^\circ+\ldots+\operatorname{tg}173^\circ+\operatorname{tg}177^\circ.$

(Garat Republikane të Matematikës, Serbi – 1976)

53. Nëse α, β dhe γ janë këndet e një trekëndëshi jokëndgjerë, vërtetoni se

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$$

(Garat Federative të Matematikës, Jugosllavi – 1976)

54. Caktoni vlerën më të vogël dhe vlerën më të madhe të funksionit

$$f(x,y)=\cos x+\cos y-\cos(x+y).$$

(Garat Republikane të Matematikës, Serbi – 1977)

55. Le të jetë S syprina e katërkëndëshit konveks $ABCD$, kurse S_1, S_2 syprinat e trekëndëshave AOB dhe COD, ku O është pika ku priten diagonalet e këtij katërkëndëshi. Vërtetoni se $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\leq\sqrt{S}$. Kur vlen shenja e barazimit?

(Garat Republikane të Matematikës, Serbi – 1977)