



UNIVERSITETI PËR BIZNES DHE TEKNOLOGJI
FAKULTETI PËR MENAXHMENT, BIZNES DHE
EKONOMI

Armend SHABANI

CALCULUS

(versioni i parë)

Prishtinë, 2007

1

Numrat e plotë. Veprimet me thyesa

Të njehsohet vlera e shprehjeve:

Shembulli 1. $(-2) - 2 \cdot \{(-21) + (-11) - (+6) - (-8) - (-4)\}$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} & (-2) - 2 \cdot \{(-21) + (-11) - (+6) - (-8) - (-4)\} \\ & = -2 - 2 \cdot \{-21 - 11 - 6 + 8 + 4\} \\ & = -2 - 2(-26) = -2 + 52 = 50. \end{aligned}$$

Shembulli 2. $[3 + (21 - (-4))] + [24 - (-12) - 36 - 7]$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} & [3 + (21 - (-4))] + [24 - (-12) - 36 - 7] \\ & = [3 + 21 + 4] + [24 + 12 - 36 - 7] \\ & = 28 + (-7) = 28 - 7 = 21. \end{aligned}$$

Shembulli 3. $2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-2)^3 - (-2) \cdot (-3)^2$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-2)^3 - (-2) \cdot (-3)^2 \\ & = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) - (-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \\ & = 2 + 3 \cdot (-8) - (-2) \cdot 9 = 2 - 24 + 18 = 20 - 24 = -4. \end{aligned}$$

Shembulli 4. $(-4 + (7 + (-5))) + (-6)$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} & (-4 + (7 + (-5))) + (-6) \\ & = (-4 + 7 - 5) - 6 = (-9 + 7) - 6 = -2 - 6 = -8. \end{aligned}$$

Shembulli 5. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} - \frac{9}{4} \\ &= \frac{9 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 9 \cdot 9}{36} = \frac{9 + 16 - 81}{36} = \frac{25 - 81}{36} = -\frac{56}{36} = -\frac{28}{18} = -\frac{14}{9}. \end{aligned}$$

Shembulli 6. $4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{3} + (-3)^2 + 2\frac{2}{3}$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{3} + (-3)^2 - \left(-2\frac{2}{3}\right) &= 4 \cdot \frac{9}{4} + \frac{7}{3} + 9 + \frac{8}{3} \\ &= 9 + \frac{7}{3} + 9 + \frac{8}{3} = 18 + \frac{7+8}{3} = 18 + \frac{15}{3} = 18 + 5 = 23. \end{aligned}$$

Shembulli 7. $\frac{\frac{11}{2} - \frac{8}{3}}{\frac{11}{2} + \frac{8}{3}} : \frac{17}{7}$.

Zgjidhja.

$$\frac{\frac{11}{2} - \frac{8}{3}}{\frac{11}{2} + \frac{8}{3}} : \frac{17}{7} = \frac{33 - 16}{6} : \frac{17}{7} = \frac{17}{6} : \frac{17}{7} = \frac{17 \cdot 6}{6 \cdot 49} : \frac{17}{7} = \frac{17}{49} \cdot \frac{7}{17} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}.$$

Shembulli 8. $\left(\frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{10}} \cdot \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{12}}\right) : \frac{1}{12}$.

Zgjidhja.

$$\left(\frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{10}} \cdot \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{3}{12}}\right) : \frac{1}{12} = \left(\frac{\frac{6-5}{30}}{\frac{10+3}{30}} \cdot \frac{\frac{4+3}{12}}{\frac{3}{12}}\right) \cdot \frac{12}{1} = \left(\frac{1}{30} \cdot \frac{7}{3}\right) \cdot 12.$$

$$= \frac{30}{30 \cdot 13} \cdot \frac{7 \cdot 12}{3 \cdot 12} \cdot 12 = \frac{1}{13} \cdot \frac{7}{3} \cdot 12 = \frac{7 \cdot 12}{13 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 4}{13 \cdot 1} = \frac{28}{13}.$$

Shembulli 9.
$$\frac{\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right) \cdot 5\frac{5}{6}}{\left(21 - \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{5}{2}}.$$

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} \frac{\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right) \cdot 5\frac{5}{6}}{\left(21 - \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{5}{2}} &= \frac{\left(\frac{33}{5} - \frac{45}{14}\right) \cdot \frac{35}{6}}{\frac{84 - 5}{4} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{462 - 225}{70} \cdot \frac{35}{6} = \frac{237}{70} \cdot \frac{35}{6} \\ &= \frac{237 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{237}{12} = \frac{237 \cdot 8}{395 \cdot 12} = \frac{237 \cdot 2}{395 \cdot 3} = \frac{474}{1185}. \end{aligned}$$

Shembulli 10.
$$\frac{(7.3 - 2.9)}{2.2}.$$

Zgjidhja.

Mënyra e parë:

Kryejmë veprimet me numra dhjetor.

$$\frac{(7.3 - 2.9)}{2.2} = \frac{4.4 \cdot 2.5}{2.2} = 2 \cdot 2.5 = 5.$$

Mënyra e dytë:

Numrat dhjetor së pari i shndërrojmë në thyesa e pastaj kryejmë veprimet me thyesa.

$$\frac{\left(\frac{73}{10} - \frac{29}{10}\right) \cdot \frac{25}{10}}{\frac{22}{10}} = \frac{73 - 29}{10} \cdot \frac{25}{10} = \frac{44}{10} \cdot \frac{25}{10} = \frac{44 \cdot 25}{10 \cdot 10} = \frac{10 \cdot 44 \cdot 25}{10 \cdot 10 \cdot 22} = \frac{50}{10} = 5.$$

Shembulli 11.
$$\frac{\left(1.7 - \frac{1}{2}\right) \cdot 0.5}{\frac{7}{5} : 0.2}.$$

Zgjidhja.

$$\frac{\left(1.7 - \frac{1}{2}\right) \cdot 0.5}{\frac{7}{5} : 0.2} = \frac{\left(\frac{17}{10} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{10}}{\frac{7}{5} : \frac{2}{10}} = \frac{\frac{17-5}{10} \cdot \frac{5}{10}}{\frac{7}{5} \cdot \frac{10}{2}} = \frac{\frac{12}{10} \cdot \frac{5}{10}}{\frac{7 \cdot 10}{10}} = \frac{\frac{12 \cdot 5}{100}}{\frac{70}{10}}$$

$$= \frac{60 \cdot 10}{100 \cdot 70} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}.$$

Detyra për ushtrime

Të njehsohet vlera e shprehjeve:

1. $(-14 + (17 + (-15))) + (-3)$.
2. $(-(-12) + (-3) - (+5))$.
3. $(-11) - (-2) - (-6)$.
4. $2(-3 + 4(-(-3) + (-5)) + 6)$.
5. $-3(-2 - 4((2) - (-12)) + (-12) - 7)$.
6. $(2 - (-3))(3 + (-4)) + 3 + 2(-(-2) + (-4)) + 1$.
7. $2(-1)^2 + 2(-3)^2 + 3(-2)^3 + 4(-1)^3$.
8. $(-2)^2 - (+2)^2 - 3^2 - 2^3$.
9. $(-2 + 3(-2)^2) + (4(-1)^5 + 2(-2)^3)$.
10. $(-1 + 2(-3)^2) \cdot (2(-2)^3 + 3(-3)^2)$.
11. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{9}\right)$.
12. $2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\frac{2}{3}\right)^2 + (-3)^2 \left(-\frac{1}{9}\right)^2$.
13. $(-2)^3 + 3\frac{1}{3} - (-2)^3 + \left(-1\frac{1}{2}\right)^3 - (-3)^2$.
14. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.
15. $\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{10}$.

$$16. \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{7}} \cdot \left(-1 \frac{5}{3}\right).$$

$$17. \frac{1 \frac{1}{2} + \frac{2}{5}}{\frac{1}{15} + \frac{1}{5}} : \frac{1}{15}.$$

$$18. \left(\frac{1 \frac{2}{3} + \frac{2}{7}}{\frac{1}{21} - 1} + \frac{1 \frac{1}{3} - \frac{1}{7}}{\frac{1}{21} + 1} \right) : \frac{1}{4}.$$

$$19. \frac{\left(2 \frac{2}{3} - 1 \frac{2}{13}\right) \cdot 2 \frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{13} - \frac{1}{39}\right) : \frac{2}{5}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1 \frac{2}{3}\right).$$

$$20. \frac{(2.9 - 4.6) \cdot 2.4}{2.5}.$$

$$21. \frac{(2.3 + (-2.5 + (-2.2))) \cdot 1.2}{1.5 : 1.3}.$$

$$22. \frac{(1.4 - (-1.5 - (-1.2))) \cdot 3.2}{0.5 : 0.3}.$$

2

Shprehjet algjebrike

1. VEPRIMET ME SHPREHJE THYESORE

Veprimet me thyesa të përgjithshme algjebrike.

- 1) $\frac{p}{q} = \frac{p \cdot t}{q \cdot t}$, $(q, t \neq 0)$ – vlera e thyesës nuk ndryshon nëse numëruesi dhe emëruesi shumëzohen me të njëjtin polinom (numër) të ndryshme nga zero.
- 2) $\frac{p}{q} = \frac{p : t}{q : t}$, $(q, t \neq 0)$ – vlera e thyesës nuk ndryshon nëse numëruesi dhe emëruesi pjesëtohen me të njëjtin polinom (numër) të ndryshëm nga zero.
- 3) $\frac{p}{r} \pm \frac{q}{r} = \frac{p \pm q}{r}$, $r \neq 0$ – tek shuma (zbritja) e dy thyesave me emërues të njëjtë, numëruesit e thyesave të dhëna mblidhen (zbriten) kurse emëruesi mbetet i njëjtë.
- 4) $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$, $(q \neq 0, s \neq 0)$ – tek prodhimi i thyesave numëruesit dhe emëruesit e thyesave të dhëna shumëzohen.
- 5) $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r}$, $(q, r, s \neq 0)$ – herësi i dy thyesave është i barabartë me prodhimin e thyesës së parë me vlerën reciproke të thyesës së dytë.

Të thjeshtohen thyesat

Shembulli 1. $\frac{6a^2b}{21ab^3}$.

Zgjidhja.

$$\frac{6a^2b}{21ab^3} = \frac{2a}{7b^2}.$$

Shembulli 2. $\frac{4xy^2}{16x^2y^3}$.

Zgjidhja.

$$\frac{4xy^2}{16x^2y^3} = \frac{y}{4xy^2} = \frac{1}{4xy}.$$

Shembulli 3. $\frac{12x^2p^3}{18xpq}$.

Zgjidhja.

$$\frac{12x^2p^3}{18xpq} = \frac{2xp^2}{3q}.$$

Shembulli 4. $\frac{(a-3)(x+y)^3}{(a-3)^2(x+y)^2}$.

Zgjidhja.

$$\frac{(a-3)(x+y)^3}{(a-3)^2(x+y)^2} = \frac{x+y}{a-3}.$$

Shembulli 5. $\frac{2x}{y} \cdot \frac{y}{6z} \cdot \frac{3z}{x} =$

Zgjidhja.

$$\frac{2x}{y} \cdot \frac{y}{6z} \cdot \frac{3z}{x} = \frac{2x \cdot y \cdot 3z}{y \cdot 6z \cdot x} = \frac{6}{6} = 1.$$

Shembulli 6. $16x^2 \cdot y^3 : \left(-\frac{20x^5 \cdot y^4}{3x^2y} \right)$.

Zgjidhja.

$$16x^2 \cdot y^3 : \left(-\frac{20x^5 \cdot y^4}{3x^2 y} \right) = 16x^2 \cdot y^3 \left(-\frac{3x^2 y}{20x^3 \cdot y^4} \right) = -16x^2 \cdot y^3 \cdot \frac{3x^2 y}{20x^5 \cdot y^4}$$

$$= -\frac{16x^2 \cdot y^3 \cdot 3x^2 y}{20x^5 \cdot y^4} = -\frac{4x^4 \cdot 3y^4}{5x^5 \cdot y^4} = \frac{4 \cdot 3}{5x} = \frac{12}{5x}.$$

Shembulli 7. $\left(\frac{52a^2b^3}{69x^4y} : \frac{39a^4b^6}{92x^3y^7} \right) \cdot \frac{91a^3 \cdot b}{115xy^2}.$

Zgjidhja.

$$\left(\frac{52a^2b^3}{69x^4y} : \frac{39a^4b^6}{92x^3y^7} \right) \cdot \frac{91a^3 \cdot b}{115xy^2} = \frac{52a^2b^3}{69x^4y} \cdot \frac{92x^3y^7}{39a^4b^6} = \frac{52 \cdot 92 \cdot 91 \cdot a^5 b^4 x^3 y^7}{69 \cdot 39 \cdot 1155 a^4 b^6 x^5 y^3}.$$

Shembulli 8. $\left(\frac{3ab}{4xy} \cdot \frac{14x^2y}{12a^2b} \right) : \frac{ab}{xy^2}.$

Zgjidhja.

$$\left(\frac{3ab}{4xy} \cdot \frac{14x^2y}{12a^2b} \right) : \frac{ab}{xy^2} = \frac{3ab}{4xy} \cdot \frac{14x^2y}{12a^2b} \cdot \frac{xy^2}{ab} = \frac{3 \cdot 14 abx^3 y^3}{4 \cdot 12 a^3 b^2 xy} = \frac{14x^2 y^2}{16a^2 b} = \frac{7x^2 y^2}{8a^2 b}.$$

Shembulli 9. $\left(\frac{x^3 y^2 p}{p^2 xy^2} : \frac{pxy}{x^2 p^2} \right).$

Zgjidhja.

$$\left(\frac{x^3 y^2 p}{p^2 xy^2} : \frac{pxy}{x^2 p^2} \right) = \frac{x^3 y^2 p}{p^2 xy^2} \cdot \frac{x^2 p^2}{pxy} = \frac{x^2}{p} \cdot \frac{xp}{y} = \frac{x^3}{y}.$$

Shembulli 10. $\frac{3}{x} - \frac{5}{x} + \frac{9}{x}.$

Zgjidhja.

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{x} + \frac{9}{x} = \frac{3-5+9}{x} = \frac{7}{x}.$$

Shembulli 11. $\frac{x+3}{4} - \frac{x-1}{4}.$

Zgjidhja.

$$\frac{x+3}{4} - \frac{x-1}{4} = \frac{x+3-1 \cdot (x-1)}{4} = \frac{x+3-x+1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Shembulli 12. $\frac{2x+3}{4b} + \frac{2x+5}{4b} - \frac{2x-7}{4b}$.

Zgjidhja.

$$\frac{2x+3}{4b} + \frac{2x+5}{4b} - \frac{2x-7}{4b} = \frac{2x+3+2x+5-2x+7}{4b} = \frac{2x+15}{4b}.$$

Shembulli 13. $\frac{4a+3b}{10} - \frac{2a-b}{5}$.

Zgjidhja.

$$\frac{4a+3b}{10} - \frac{2a-b}{5} = \frac{4a+3b-2(2a-b)}{10} = \frac{4a+3b-4a+2b}{10} = \frac{5b}{10} = \frac{b}{2}.$$

Shembulli 14. $\frac{1}{6a} + \frac{1}{3b^2} - \frac{a^2-b^2}{6ab^2}$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} \frac{1}{6a} + \frac{1}{3b^2} - \frac{a^2-b^2}{6ab^2} &= \frac{b^2 \cdot 1 + 2a \cdot 1 - 1 \cdot (a^2 - b^2)}{6ab^2} = \frac{b^2 + 2a - a^2 + b^2}{6ab^2} \\ &= \frac{2b^2 + 2a - a^2}{6ab^2}. \end{aligned}$$

Shembulli 15. $\frac{x-2y}{x^2y} - \frac{2x+3y}{xy^2}$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} \frac{x-2y}{x^2y} - \frac{2x+3y}{xy^2} &= \frac{y(x-2y) - x(2x+3y)}{x^2y^2} = \frac{yx - 2y^2 - 2x^2 - 3xy}{x^2y^2} \\ &= \frac{-2y^2 - 2x^2 - 2xy}{x^2y^2}. \end{aligned}$$

Shembulli 16. $\frac{2x+1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{x-2}{x}$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{x-2}{x} &= \frac{2x(2x+1)+1+2x(x-2)}{2x^2} = \frac{4x^2+2x+1+2x^2-4x}{2x^2} \\ &= \frac{6x^2-2x+1}{2x^2}. \end{aligned}$$

2. ZBËRTHIMI I POLINOMIT NË FAKTORË

Së pari përkujtojmë se shprehjet

$$3x^2 + x, x^2 - \frac{1}{2}x + 3, x^3 + x + 1, x^7 - x + 2$$

paraqesin polinome.

Shprehja

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

ku a_0, a_1, \dots, a_n janë numra realë quhet **polinom**.

Ligjet dhe formulat për zbërthimin e polinomit në faktor:

1. Ligji distributiv – faktori i përbashkët nxirret para kllapave
 $ab \pm ac = a(b \pm c)$.

2. Grupimi i anëtarëve

$$ax + ay + bx + by = ax + bx + ay + by = (a+b)x + (a+b)y = (a+b)(x+y).$$

3. Katrori i shumës $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$.

4. Katrori i ndryshimit $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$.

5. Ndryshimi i katrorëve $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

6. Kubi i shumës $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

7. Kubi i ndryshimit $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

8. Shuma e kubeve $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

9. Ndryshimi i kubeve $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Le të vërtetojmë disa nga formulat e mësipërme:

Shembulli 1. Tregojmë se $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Shembulli 2. Tregojmë se $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
 (a-b)^3 &= (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) \\
 &= (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - a^2b - 2ab + 2ab^2 + ab^2 - b^3 \\
 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.
 \end{aligned}$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

Shembulli 3. Tregojmë se $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
 (a+b)(a-b) &= a \cdot a + a \cdot b - b \cdot a - b \cdot b = a^2 + ab - ba - b^2 \\
 &= a^2 - b^2.
 \end{aligned}$$

Shembulli 4. Tregojmë se $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
 (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 \\
 &= a^3 - b^3.
 \end{aligned}$$

Shembulli 5. Tregojmë se $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
 (a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 \\
 &= a^3 + b^3.
 \end{aligned}$$

Shembulli 6. Zbërtheni shprehjen $(1+2x)^3$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
 (1+2x)^3 &= 1^3 + 3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 \cdot (2x)^2 + (2x)^3 \\
 &= 1 + 6x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 + 8x^3.
 \end{aligned}$$

Shembulli 7. Të faktorizohet shprehja $1^3 - x^3$.

Zgjidhja.

$$1^3 - x^3 = (1-x)(1^2 + 1 \cdot x + x^2) = (1-x)(1+x+x^2).$$

Të zbatohen formulat e mësipërme.

Shembulli 8. $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) : (x+y)$

Zgjidhja.

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) : (x+y) \left(\frac{x^2 - y^2}{xy}\right) : \frac{(x+y)}{1} = \frac{x^2 - y^2}{xy} \cdot \frac{1}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y) \cdot (xy)} = \frac{x-y}{xy}.$$

Shembulli 9. $\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) : (x+y).$

Zgjidhja.

$$\left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) : (x+y) = \frac{y^2 - x^2}{y^2} : (x+y) = \frac{(y-x)(y+x)}{y^2} \cdot \frac{1}{x+y} = \frac{y-x}{y^2}.$$

Shembulli 10. $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right).$

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) &= \frac{b-a}{ab} : \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} = \frac{b-a}{ab} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \\ &= \frac{b-a}{ab} \cdot \frac{a^2 b^2}{(b-a)(b+a)} = \frac{ab}{b+a}. \end{aligned}$$

Shembulli 11. $\frac{a}{ab-b^2} + \frac{b}{a^2-ab} + \frac{a+b}{ab}.$

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} \frac{a}{ab-b^2} + \frac{b}{a^2-ab} + \frac{a+b}{ab} &= \frac{a}{b(a-b)} + \frac{b}{a(a-b)} + \frac{a+b}{ab} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + (a-b)(a+b)}{ab(a-b)} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 - b^2}{ab(a-b)} = \frac{2a^2}{ab(a-b)} = \frac{2a}{b(a-b)}. \end{aligned}$$

Shembulli 12. $\frac{1}{a^2 + ab} + \frac{2b}{a^3 - ab^2} - \frac{a+b}{a^2 b - ab^2}.$

Zgjidhja

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 + ab} + \frac{2b}{a^3 - ab^2} - \frac{a+b}{a^2 b - ab^2} &= \frac{1}{a(a+b)} + \frac{2b}{a(a^2 - b^2)} - \frac{a+b}{ab(a-b)} \\ &= \frac{1}{a(a+b)} + \frac{2b}{a(a-b)(a+b)} - \frac{a+b}{ab(a-b)} = \frac{b(a-b) + 2b^2 - (a+b)^2}{ab(a+b)(a-b)} \\ &= \frac{ba - b^2 + 2b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)}{ab(a+b)(a-b)} = \frac{ba - b^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{ab(a+b)(a-b)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-ab - a^2}{ab(a+b)(a-b)} = \frac{-a(b+a)}{ab(a+b)(a-b)} = \frac{-1}{b(a-b)}.$$

Shembulli 13. $\frac{ab+a}{b^2-b+1} : \left(\frac{1}{b+1} + \frac{3b}{b^3+1} \right).$

Zgjidhja

$$\frac{ab+a}{b^2-b+1} : \left(\frac{1}{b+1} + \frac{3b}{b^3+1} \right) = \frac{ab+a}{b^2-b+1} : \left(\frac{1}{b+1} + \frac{3b}{(b+1)(b^2-b+1)} \right)$$

$$\frac{ab+a}{b^2-b+1} : \left(\frac{1}{b+1} + \frac{3b}{(b+1)(b^2-b+1)} \right)$$

$$\frac{ab+a}{b^2-b+1} : \left(\frac{b^2-b+1+3b}{(b+1)(b^2-b+1)} \right)$$

$$\frac{ab+a}{b^2-b+1} : \frac{b^2+2b+1}{(b+1)(b^2-b+1)}$$

$$\frac{ab+a}{b^2-b+1} \cdot \frac{(b+1)(b^2-b+1)}{b^2+2b+1}$$

$$\frac{(ab+a)(b+1)}{b^2+2b+1} = \frac{a(b+1)(b+1)}{b^2+2b+1} = \frac{a(b+1)^2}{b^2+2b+1} = \frac{a(b^2+2b+1)}{b^2+2b+1} = a.$$

Shembulli 14. $\left(1+a+\frac{1}{1-a} \right) : \left(1+\frac{1}{1-a^2} \right).$

Zgjidhja.

$$\left(1+a+\frac{1}{1-a} \right) : \left(1+\frac{1}{1-a^2} \right) = \left(\frac{(1+a)(1-a)+1}{1-a} \right) : \left(\frac{1-a^2+1}{1-a^2} \right)$$

$$= \frac{1-a^2+1}{1-a} \cdot \frac{1-a^2}{2-a^2} = \frac{2-a^2}{1-a} \cdot \frac{1-a^2}{2-a^2} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1-a^2}{1}$$

$$= \frac{1^2-a^2}{1-a} = \frac{(1-a)(1+a)}{1-a} = 1+a.$$

Shembulli 15. $\frac{16x-x^2}{x^2-4} + \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{x+2}.$

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
\frac{16x-x^2}{x^2-4} + \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{x+2} &= \frac{16x-x^2}{(x-2)(x+2)} + \frac{3+2x}{-x+2} - \frac{2-3x}{x+2} \\
&= \frac{16x-x^2}{(x-2)(x+2)} + \frac{3+2x}{-(x-2)} - \frac{2-3x}{x+2} = \frac{16x-x^2}{(x-2)(x+2)} - \frac{3+2x}{x-2} - \frac{2-3x}{x+2} \\
&= \frac{16x-x^2 - (x+2)(3+2x) - (x-2)(2-3x)}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{16x-x^2 - (3x+2x^2+6+4x) - (2x-3x^2-4+6x)}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{16x-x^2 - (7x+2x^2+6) - (8x-3x^2-4)}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{16x-x^2-7x-2x^2-6-8x+3x^2+4}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}.
\end{aligned}$$

Shembulli 16. $\left(\frac{5a}{a+x} + \frac{5x}{a-x} + \frac{10ax}{a^2-x^2}\right) : \left(\frac{a}{a+x} + \frac{x}{a-x} - \frac{2ax}{a^2-x^2}\right)$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{5a}{a+x} + \frac{5x}{a-x} + \frac{10ax}{a^2-x^2}\right) : \left(\frac{a}{a+x} + \frac{x}{a-x} - \frac{2ax}{a^2-x^2}\right) \\
&= \left(\frac{5a}{a+x} + \frac{5x}{a-x} + \frac{10ax}{(a-x)(a+x)}\right) : \left(\frac{a}{a+x} + \frac{x}{a-x} - \frac{2ax}{(a-x)(a+x)}\right) \\
&= \left(\frac{5a(a-x) + 5x(a+x) + 10ax}{(a-x)(a+x)}\right) : \left(\frac{a(a-x) + x(a+x) - 2ax}{(a-x)(a+x)}\right) \\
&= \left(\frac{5a^2 - 5ax + 5xa + 5x^2 + 10ax}{(a-x)(a+x)}\right) : \left(\frac{a^2 - ax + xa + x^2 - 2ax}{(a-x)(a+x)}\right) \\
&= \left(\frac{5a^2 + 10ax + 5x^2}{(a-x)(a+x)}\right) : \left(\frac{(a-x)(a+x)}{a^2 - 2ax + x^2}\right) \\
&= \frac{5(a^2 + 2ax + x^2)}{a^2 - 2ax + x^2} = \frac{5(a+x)^2}{(a-x)^2} \dots
\end{aligned}$$

Shembulli 17. $\frac{4a^2}{10ab-25b^2} - \frac{25b^2}{4a^2-10ab} - \frac{2a}{5b} - \frac{5b}{2a}$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
& \frac{4a^2}{10ab - 25b^2} - \frac{25b^2}{4a^2 - 10ab} - \frac{2a}{5b} - \frac{5b}{2a} \\
&= \frac{4a^2}{5b(2a - 5b)} - \frac{25b^2}{2a(2a - 5b)} - \frac{2a}{5b} - \frac{5b}{2a} \\
&= \frac{2a \cdot 4a^2 - 5b \cdot 25b^2 - 2a(2a - 5b)2a - 5b(2a - 5b)5b}{10ab(2a - 5b)} \\
&= \frac{8a^3 - 125b^3 - 4a^2(2a - 5b) - 25b^2(2a - 5b)}{10ab(2a - 5b)} \\
&= \frac{8a^3 - 125b^3 - 8a^3 + 20a^2b - 50ab^2 + 125b^3}{10ab(2a - 5b)} \\
&= \frac{20a^2b - 50ab^2}{10ab(2a - 5b)} = \frac{10ab(2a - 5b)}{10ab(2a - 5b)} = 1.
\end{aligned}$$

Shembulli 18. $\frac{1}{x^2 + 6x + 9} + \frac{2}{x^2 - 9} + \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x^2 + 6x + 9} + \frac{2}{x^2 - 9} + \frac{1}{x^2 - 6x + 9} = \frac{1}{(x + 3)^2} + \frac{2}{(x - 3)(x + 3)} + \frac{1}{(x - 3)^2} \\
&= \frac{(x - 3)^2 + 2(x - 3)(x + 3) + (x + 3)^2}{(x + 3)^2(x - 3)^2} \\
&= \frac{x^2 - 2x \cdot 3 + 3^2 + 2(x^2 - 3^2) + x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2}{(x + 3)^2(x - 3)^2} \\
&= \frac{x^2 - 6x + 9 + 2x^2 - 18 + x^2 + 6x + 9}{(x + 3)^2(x - 3)^2} = \frac{4x^2}{(x + 3)^2(x - 3)^2}.
\end{aligned}$$

Shembulli 19. $\frac{\frac{3a - 2b}{9a^2 - 4b^2} - \frac{3a + 2b}{9a^2 + 4b^2}}{\frac{3a + 2b}{9a^2 + 4b^2} - \frac{3a - 2b}{9a^2 - 4b^2}}$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
& \frac{3a-2b}{3a+2b} - \frac{3a+2b}{3a-2b} = \frac{(3a-2b)^2 - (3a+2b)^2}{(3a+2b)(3a-2b)} \\
& \frac{9a^2-4b^2}{9a^2+4b^2} - \frac{9a^2+4b^2}{9a^2-4b^2} = \frac{(9a^2-4b^2)^2 - (9a^2+4b^2)^2}{(9a^2+4b^2)(9a^2-4b^2)} \\
& \quad \frac{(3a)^2 - 2(3a)(2b) + (2b)^2 - ((3a)^2 + 2(3a)(2b) + (2b)^2)}{(3a+2b)(3a-2b)} \\
& = \frac{(9a^2)^2 - 2(9a^2)(4b^2) + (4b^2)^2 - ((9a^2)^2 + 2 \cdot 9a^2 \cdot 2 \cdot 4b^2 + (4b^2)^2)}{(9a^2+4b^2)(9a^2-4b^2)} \\
& \quad \frac{(3a)^2 - 2(3a)(2b) + (2b)^2 - (3a)^2 - 2(3a)(2b) - (2b)^2}{(3a+2b)(3a-2b)} \\
& = \frac{(9a^2)^2 - 2(9a^2)(4b^2) + (4b^2)^2 - (9a^2)^2 - 2 \cdot 9a^2 \cdot 4b^2 + (4b^2)^2}{(3a+2b)(9a^2-4b^2)} \\
& \quad \frac{-12ab-12ab}{(3a+2b)(3a-2b)} = \frac{-24ab}{9a^2-4b^2} \\
& = \frac{-72a^2b^2-72a^2b^2}{(9a^2+4b^2)(9a^2-4b^2)} = \frac{-14a^2b^2}{(9a^2+4b^2)(9a^2-4b^2)} \\
& = \frac{-24ab(9a^2+4b^2)(9a^2-4b^2)}{-144a^2b^2(9a^2-4b^2)} = \frac{9a^2+4b^2}{6ab}.
\end{aligned}$$

Shembulli 20. $\frac{x+1}{4x^3-x} + \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{4x^2-4x+1}$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{4x^3-x} + \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{4x^2-4x+1} = \frac{x+1}{x(4x^2-1)} + \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{(2x-1)^2} \\
& = \frac{x+1}{x(2x-1)(2x+1)} + \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{(2x-1)^2} \\
& = \frac{(2x-1)(x+1) + x(2x-1)(2x+1) - x(2x+1)2x}{x(2x-1)^2(2x+1)} \\
& = \frac{2x^2+2x-x-1+x(4x^2-1)-2x^2(2x+1)}{x(2x-1)^2(2x+1)} \\
& = \frac{2x+x-1+4x^3-x-4x^3-2x^2}{x(2x-1)^2(2x+1)} = \frac{-1}{x(2x-1)^2(2x+1)}.
\end{aligned}$$

Detyra për ushtrime

Të thjeshtohen thyesat

$$1. \frac{6ac}{14a^3bc};$$

$$2. \frac{4ab^2c^3}{12a^3b^2c};$$

$$3. \frac{7ab^2p^3}{21abp}.$$

$$4. \frac{(a+b)(x+1)^2}{3(a+b)^2(x+1)^3};$$

$$5. \frac{x(a+2y)}{2a^2+4ay};$$

$$6. \frac{x^2y^2(x+1)}{7x^2y^3(x^2+2x+1)};$$

Kryeni veprimet me polinome:

$$7. a) \frac{2a+b}{4} - \frac{3a+2b}{6}; \quad b) \frac{1}{3a} + \frac{1}{2a} - \frac{2b-3a}{6ab}; \quad c) \frac{x+y}{x^2y} + \frac{x-y}{y^2x}.$$

$$8. a) \frac{1-9a^2}{3a+1}; \quad b) \frac{x^4-x}{(x^2+x+1)(x+1)}; \quad c) \frac{(x+3)^2-25}{(2x-4)(x^2+1)}.$$

$$9. a) \frac{3}{x-x^2} - \frac{4}{1-x^2} - \frac{2}{x+x^2}; \quad b) \frac{x^2}{x^2-36} + \frac{x-1}{x+6} - \frac{2x+1}{x-6};$$

$$c) \frac{2x}{x+1} - \frac{x(2x^2-2x+3)}{x^3+1} + \frac{x+1}{x^2-x+1}.$$

$$10. a) \frac{1}{x^2+6x+9} + \frac{2}{x^2-9} + \frac{1}{x^2-6x+9};$$

$$b) \frac{x+1}{4x^3-x} + \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{4x^2-4x+1};$$

$$11. a) \frac{1}{x^3-1} \cdot \frac{x^4-x}{x^2+x};$$

$$b) \frac{x^3-x}{y^4-1} \cdot \frac{y^3+y^2+y+1}{x+1} \cdot \frac{y-1}{x-1};$$

$$c) \left(\frac{2-x}{x+1} - 1 \right) \cdot \left(\frac{x^2 + \frac{1}{2}}{2x-1} - \frac{x}{2} \right);$$

$$d) \left(\frac{a+b}{b} - \frac{a+c}{a} \right) \frac{b^2}{a^2-bc}.$$

$$12. a) \frac{x^2+2}{x^2+x+1} : \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1-3x-x^2}{x^3-1} \right);$$

$$b) \frac{x^2-y^2}{1-6m+9m^2} : \frac{x^4-y^4}{1-18m^2+81m^4}.$$

$$13. a) \frac{\frac{(a+b)^3}{3ab} - a - b}{\frac{(a-b)^2}{ab} + 1};$$

$$b) \frac{\frac{3a-2b}{3a+2b} - \frac{3a+2b}{3a-2b}}{\frac{9a^2-4b^2}{9a^2+4b^2} - \frac{3a-2b}{9a^2-4b^2}}.$$

$$14. a) \left(\frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a} \right) : \left(\frac{a}{ab+b^2} + \frac{2}{a+b} + \frac{b}{a^2+ab} \right);$$

$$b) \left(\frac{1}{a-1} + \frac{1+2a^2}{1-a^3} + \frac{3a+2}{a^2+a+1} \right) \cdot \left(a + \frac{1}{a+1} \right).$$

Të thjeshtohen shprehjet:

$$15. 3y^2((2y-1)+y+1) - y(1-y+y^2) - y^2 + y.$$

$$16. 2x^2 \cdot a - a(1+2x^2) - (a-x(x+a)).$$

$$17. (2x^3 - (x^3 - 1) + (x+3)2x^2 - 2x^3)(3x)^2 - 3x^5.$$

$$18. (x+1)(1+x-x^2+x^3-x^4) - (x-1)(1+x+x^2+x^3+x^4).$$

$$19. (x-y-z)(x-y) + (y-x-z)(z-x) + (z-x-y)(y-z).$$

$$20. (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - (x+2)(x+3)(x+4)(x+5).$$

Të thjeshtohen shprehjet:

$$21. (y-2)(y+2) + (y-3)(y+3) - y(2y+1) - 4.$$

$$22. (5a-b+1)(5a+b-1) - 24(a+1)^2 + b^2 - 1.$$

$$23. (x-2y^2)^2 - (x+2y^2)^2.$$

$$24. (2x+1)(2x-1)(4x^2+1).$$

$$25. (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2.$$

$$26. (a+2b-c)^2 - (a-2b+c)^2.$$

$$27. (x-y)^3 - (x+y)^3.$$

$$28. \left(\frac{1}{2}b + y \right)^3 + \left(\frac{1}{2}b - y \right)^3.$$

$$29. (a-b+c)^3 - (a+b+c)^3.$$

$$30. (a-b)^2 + 2ac + 2(a-b) - 2bc + (c+1)^2.$$

Të kryhen veprimet me shprehjet algjebrike:

$$31. \frac{x^2 - y^2}{ab} \cdot \frac{b}{x-y} \cdot \frac{a}{x+y}.$$

$$32. \frac{x^2 + xy}{7x^2 - 7y^2} \cdot \frac{4x^3 - 4y^3}{x^2 - xy}.$$

$$33. \frac{a+b}{a^2bc} : \frac{2(a-b)}{abc}.$$

$$34. \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} : (x+y).$$

$$35. \frac{m^3 - n^3}{(mn - n^2)^2} : \frac{mn + m^2}{m^2 - n^2}.$$

$$36. \frac{14a^4b^2}{5xy} \cdot \frac{10x^2y^3}{21a^2b^3}.$$

$$37. \frac{9cx^3}{16ab} \cdot \frac{2ab^2}{cx} \cdot \frac{4by^2}{3ax^2}.$$

$$38. \frac{x^2y^2 - 4y^2}{4xy} \cdot \frac{x^2y}{2xy - x^2y}.$$

$$39. \frac{2x^3 - 2y^3}{3x + 3y} \cdot \frac{15x^2 - 15y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

$$33. \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^4 - b^4}{a^2 - 2ab + b^2}.$$

$$34. \frac{a^2 + ab}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^3 - b^3}{ab(a+b)}.$$

$$40. \frac{(x^2 + y(x+y))(x^2 - y^2)}{(x^3 + 3xy(x+y) + y^3)(x^3 - y^3)}.$$

$$41. \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} \cdot \frac{a^3 + b^3}{a-b}.$$

$$42. \frac{m^2 + m(a+b) + ab}{m^2 - (a-c)m - ac} \cdot \frac{m^2 - c^2}{m^2 - a^2}.$$

$$43. \frac{ab - ad}{bc + cd} \cdot \frac{ba + ad}{bc - cd}.$$

$$44. \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2 - 2xy} \cdot \frac{x-y}{xy + x^2}.$$

$$45. \frac{a^2 + b^2 - ab}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{a^3 + b^3}.$$

$$46. \frac{3y^2}{x^4 - xy^3} + \frac{y}{x^3 + x^2y + y^2x} - \frac{1}{x^2 - xy}.$$

$$47. \frac{x^3 - y^3}{2y} \cdot \left(\frac{2y}{4 - 2y - 2x + xy} + \frac{2xy + 4y}{(x-y)(x^2 - 4)} \right).$$

$$48. \frac{\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}} \cdot \frac{a}{b}.$$

$$49. \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right).$$

$$50. \frac{2}{4x - x^2} + \left(\frac{1}{x^2 - 4x} + \frac{2}{16 - x^2} + \frac{1}{16 + 4x}\right) \cdot \left(\frac{x+4}{x-4}\right)^2.$$

$$51. \frac{\left(\frac{(a+b)^2}{4ab} - 1\right)\left(\frac{(a+b)^2}{4ab} + 1\right)}{(a+b)^3 - 3ab(a+b)} \cdot \frac{(ab + (a-b)^2)((a+b)^2 - ab)}{(a-b)^3 + 3ab(a-b)}.$$

$$52. \left(\frac{y^2 - x^2}{m^2 - n^2} \cdot \frac{m+n}{x-y} - \frac{x}{n-m}\right) \cdot \frac{m-n}{2y}.$$

$$53. \frac{x^3 - 9y^2x}{9y^2 + x^2} \cdot \left(\frac{x+3y}{x^2 - 3xy} + \frac{x-3y}{3xy + x^2}\right).$$

$$54. \left(\frac{x}{x^2 - y^2} - \frac{x}{(x-y)^2}\right) \cdot \frac{y^2 - 2xy + x^2}{2x} + \frac{y}{x+y}.$$

$$55. \frac{(a-b)^2}{a} \cdot \left(\frac{a}{(a-b)^2} + \frac{a}{b^2 - a^2}\right) + \frac{3a+b}{a+b}.$$

$$56. \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{b^2 - a^2}\right) \cdot \frac{a}{a-b} + \left(\frac{b}{b-a} + \frac{2ab}{a^2 - b^2}\right).$$

$$57. \frac{1}{x} \left(\frac{y^2 - xy}{x+y}\right)^2 \cdot \left(\frac{x+y}{(x-y)^2} + \frac{x+y}{xy - y^2}\right) + \frac{x}{x+y}.$$

3

Barazimet lineare

1. BARAZIMET LINEARE ME NJË TË PANJOHUR

Barazimi (ekuacioni)

$$ax = b \quad (1)$$

paraqet formën e përgjithshme të barazimit linear me një të panjohur.

Në relacionin (1) e panjohura është x .

Numri z është zgjidhje e barazimit (1) nëse $a \cdot z = b$.

Nëse $a \neq 0$ barazimi (1) ka vetëm një zgjidhje $x = \frac{b}{a}$.

Vërtetë $a \cdot \frac{b}{a} = b$.

Nëse $a = 0$ dhe $b \neq 0$ merret $0 \cdot x = b, b \neq 0$, gjë që nuk është e mundur. Në këtë rast themi se barazimi (1) nuk ka zgjidhje (ose themi se është i pamundur).

Nëse $a = 0, b = 0$, merret $0 \cdot x = 0$ dhe këtë barazim e plotëson çdo numër real x . Në këtë rast themi se barazimi (1) ka pakufi shumë zgjidhje (ose themi se barazimi është i pacaktuar).

Të zgjidhen barazimet:

Shembulli 1. $x + 4 = 2x - 7$.

Zgjidhja.

Përkujtojmë se gjatë zgjidhjes së barazimeve, të panjohurat i vendosim në një rën anë të barazimit (zakonisht në anën majtë) dhe të njohurat në anën tjetër.

$$x + 4 = 2x - 7$$

$$x - 2x = -4 - 7$$

$$-x = -11$$

$$x = 11.$$

Prova. $11 + 4 = 2 \cdot 11 - 7$

$$15 = 22 - 7$$

$$15 = 15.$$

Shembulli 2. $(x + 3) - 2(x - 1) = 5.$

Zgjidhja.

$$(x + 3) - 2(x - 1) = 5$$

$$x + 3 - 2x + 2 = 5$$

$$-x + 5 = 5$$

$$-x = 0$$

$$x = 0.$$

Shembulli 3. $3x - (x + 2) = 12(x - 3).$

Zgjidhja.

$$3x - (x + 2) = 12(x - 3)$$

$$3x - x - 2 = 12x - 36$$

$$2x - 2 = 12x - 36$$

$$-2 + 36 = 12x - 2x$$

$$10x = 34$$

$$x = \frac{34}{10} = \frac{17}{5}.$$

Shembulli 4. $4y - \frac{1}{2}(y + 1) = \frac{3}{2}y.$

Zgjidhja.

$$4y - \frac{1}{2}(y + 1) = \frac{3}{2}y$$

$$4y - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}y$$

$$4y - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}$$

$$\frac{8y - y - 3y}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4y}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{4}.$$

Shembulli 5. $\frac{x+1}{3} - x = \frac{x-1}{4} + \frac{x}{2}.$

Zgjidhja.

Të dy anët e barazimit $\frac{x+1}{3} - x = \frac{x-1}{4} + \frac{x}{2}$ **i shumëzojmë me shumëfishin më të vogël të përbashkët të numrave 2,3,4 e që është 12. Merret:**

$$\frac{x+1}{3} - x = \frac{x-1}{4} + \frac{x}{2} \quad | \cdot 12$$

$$4(x+1) - 12x = 3(x-1) + 6x$$

$$4x + 4 - 12x = 3x - 3 + 6x$$

$$-8x + 4 = 9x - 3$$

$$-17x = -7$$

$$x = \frac{7}{17}.$$

Shembulli 6. $\frac{3x-1}{5} + 2(x+1) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}(x+3).$

Zgjidhja.

$$\frac{3x-1}{5} + 2(x+1) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}(x+3) \quad | \cdot 10$$

$$2(3x-1) + 10 \cdot 2(x+1) = 5x - 2 \cdot 3(x+3)$$

$$6x - 2 + 20(x+1) = 5x - 6(x+3)$$

$$6x - 2 + 20x + 20 = 5x - 6x - 18$$

$$26x + 18 = -x - 18$$

$$27x = -36$$

$$x = -\frac{36}{27} = -\frac{4}{3}.$$

Shembulli 7. $x + \frac{2}{3}x = \frac{1}{4}.$

Zgjidhja.

$$x + \frac{2}{3}x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3x + 2x}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{5x}{3} = \frac{1}{4} \cdot 12$$

$$20x = 3$$

$$x = \frac{3}{20}.$$

Shembulli 8. $x + 7 = \frac{3}{2}x.$

Zgjidhja.

$$x + 7 = \frac{3}{2}x$$

$$x - \frac{3}{2}x = -7$$

$$\frac{2x - 3x}{2} = -7$$

$$\frac{-x}{2} = -7 \mid \cdot (-1)$$

$$\frac{x}{2} = 7 \mid \cdot 2$$

$$x = 14.$$

Shembulli 9. $x - \frac{1}{2}x + 6 = \frac{1}{3}x - 4.$

Zgjidhja.

$$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = -4 - 6$$

$$\frac{6x - 3x - 2x}{6} = -10$$

$$\frac{x}{6} = -10$$

$$x = -60.$$

Shembulli 10. $\frac{x}{8} + \frac{x}{4} = \frac{x}{12}.$

Zgjidhja.

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{4} - \frac{x}{12} = 0$$

$$\frac{3x + 6x - 2x}{24} = 0$$

$$\frac{7x}{24} = 0 \mid \cdot 24$$

$$7x = 0 \mid : 7. \text{ Pra } x = 0.$$

Shembulli 11. $\frac{x-1}{5} + \frac{x-2}{3} = \frac{1}{5}$.

Zgjidhja.

$$\frac{3(x-1)+5(x-2)}{15} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{3x-3+5x-10}{15} = \frac{1}{15} \quad | \cdot 15$$

$$3x-3+5x-10=1$$

$$8x-13=1$$

$$8x=14 \quad | :8$$

$$x = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

Shembulli 13. $\frac{x-1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x-2}{5}$

Zgjidhja.

$$\frac{x-\frac{4}{3}}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x-2}{5}$$

$$\frac{3x-4}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x-2}{5}$$

$$\frac{3x-4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{x-2}{5} \quad | \cdot 180$$

$$20(3x-4) + 45 \cdot 1 = 36(x-2)$$

$$60x - 80 + 45 = 36x - 72$$

$$60x - 36x = -72 + 80 - 45$$

$$24x = -37$$

$$x = -\frac{37}{24}$$

Shembulli 12. $\frac{x-\frac{2}{3}}{4} + \frac{x}{12} = \frac{1}{18}$.

Zgjidhja.

$$\frac{3x-2}{4} + \frac{x}{12} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{3x-2}{12} + \frac{x}{12} = \frac{1}{18} \quad | \cdot 36$$

$$3(3x-2) + 3x = 2$$

$$9x - 6 + 3x = 2$$

$$12x = 2 + 6. \quad \text{Pra } x = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Shembulli 14. } \frac{x - \frac{2}{3}}{1 - \frac{3}{4}} + \frac{2x - 1\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{x}{2} + 1$$

Zgjidhja.

$$\frac{\frac{3x-2}{3}}{\frac{1}{4}} + \frac{2x-\frac{5}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{x}{2} + 1$$

$$\frac{4(3x-2)}{3} + \frac{\frac{6x-5}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{x}{2} + 1$$

$$\frac{12x-8}{3} + \frac{5(6x-5)}{3} = \frac{x}{2} + 1$$

$$\frac{12x-8}{3} + \frac{30x-25}{3} = \frac{x}{2} + 1 \quad | \cdot 6$$

$$2(12x-8) + 2(30x-25) = 3x+6$$

$$24x-16+60x-50=3x+6$$

$$24x+60x-3x=6+16+50$$

$$81x=72 \quad | :81$$

$$x = \frac{72}{81} = \frac{8}{9}$$

$$\text{Shembulli 15. } 2x+1+3(x+1)(x-1) = (3x+2)(x-1).$$

Zgjidhja.

$$2x+1+3(x+1)(x-1) = (3x+2)(x-1)$$

$$2x+1+3(x^2-1) = 3x^2-3x+2x-2$$

$$2x+1+3x^2-3 = 3x^2-x-2$$

$$2x+3x^2-3x^2+x = -2+3-1$$

$$3x=0$$

$$x=0.$$

Shembulli 16. $(2x-1)^2 + (3x+1)^2 = 13x^2 + 12$.

Zgjidhja.

$$(2x-1)^2 + (3x+1)^2 = 13x^2 + 12$$

$$4x^2 - 4x + 1 + 9x^2 + 6x + 1 = 13x^2 + 12$$

$$13x^2 + 2x - 13x^2 = 12 - 2$$

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2} = 5.$$

Shembulli 17. $\frac{1+\frac{x}{2}}{3} + \frac{\frac{3x}{2}-1}{2} - \frac{1+3x}{6} - \frac{\frac{x}{3}-\frac{2}{3}}{12} = 1$.

Zgjidhja.

$$\frac{1+\frac{x}{2}}{3} + \frac{\frac{3x}{2}-1}{2} - \frac{1+3x}{6} - \frac{\frac{x}{3}-\frac{2}{3}}{12} = 1$$

$$\frac{2+x}{3} + \frac{3x-2}{2} - \frac{1+3x}{6} - \frac{x-2}{12} = 1$$

$$\frac{2+x}{6} + \frac{3x-2}{4} - \frac{1+3x}{6} - \frac{x-2}{36} = 1 \quad | \cdot 36$$

$$6(2+x) + 9(3x-2) - 6(1+3x) - (x-2) = 36$$

$$12 + 6x + 27x - 18 - 6 - 18x - x + 2 = 36$$

$$14x = 46$$

$$x = \frac{46}{14} = \frac{23}{7}.$$

Shembulli 18. $\frac{1-\frac{3-x}{2}}{5} + x - \frac{\frac{x}{3}+\frac{x}{2}}{5} + \frac{11}{15} = 0$

Zgjidhja.

$$\frac{1-\frac{3-x}{2}}{5} + x - \frac{\frac{x}{3}+\frac{x}{2}}{5} + \frac{11}{15} = 0$$

$$\frac{2-3+x}{5} + x - \frac{2x+3x}{5} + \frac{11}{15} = 0$$

$$\frac{x-1}{10} + x - \frac{5x}{6 \cdot 5} + \frac{11}{15} = 0$$

$$\frac{x-1}{10} + x - \frac{x}{6} + \frac{11}{15} = 0 \mid \cdot 30$$

$$3(x-1) + 30x - 5x + 22 = 0$$

$$3x - 3 + 25x = -22$$

$$28x = -19. \text{ Pra } x = -\frac{19}{28}.$$

Gjatë zgjidhjes së disa llojeve të barazimeve zbatohet ekuivalenca vijuese:

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \wedge B \neq 0.$$

Duke zbatuar ekuivalencën e mësipërme të zgjidhen barazimet:

Shembulli 19. $\frac{x-1}{x+2} = 0.$

Zgjidhja.

$$\frac{x-1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \wedge x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \wedge x \neq -2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Shembulli 20. $\frac{x-4}{x^2+1} = 0.$

Zgjidhja.

$$\frac{x-4}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x-4 = 0 \wedge x^2+1 \neq 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Shembulli 21. $\frac{x(x-3)}{x^2-9} = 0.$

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} \frac{x(x-3)}{x^2-9} = 0 &\Leftrightarrow x(x-3) = 0 \wedge x^2-9 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (x=0 \text{ ose } x-3=0) \wedge (x-3)(x+3) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \text{ ose } x-3=0) \wedge (x-3 \neq 0, x+3 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \text{ ose } x=3) \wedge (x \neq 3, x \neq -3) \Leftrightarrow x=0.$$

Shembulli 22. $\frac{3x-1}{2+x}=1.$

Zgjidhja.

$$\frac{3x-1}{2+x}=1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2+x}-1=0 \Leftrightarrow \frac{3x-1-2-x}{2+x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{2+x}=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \wedge 2+x \neq 0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Shembulli 23. $\frac{7x-1}{2+x}=2.$

Zgjidhja.

$$\frac{7x-1}{2+x}=2 \Leftrightarrow \frac{7x-1}{2+x}-2=0 \Leftrightarrow \frac{7x-1-4-2x}{2+x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-5}{2+x}=0 \Leftrightarrow 5x-5=0 \wedge 2+x \neq 0 \Leftrightarrow x=1.$$

Shembulli 24. $\frac{3x-1}{x-3}=\frac{2x}{x-3}.$

Zgjidhja.

$$\frac{3x-1}{x-3}=\frac{2x}{x-3} \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x-3}-\frac{2x}{x-3}=0 \Leftrightarrow \frac{3x-1-2x}{x-3}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-3}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \wedge x-3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x=1.$$

Të zgjidhen barazimet:

Shembulli 25. $\frac{x-1}{x+3}+\frac{x-3}{x-1}=2.$

Zgjidhja.

$$\frac{x-1}{x+3}+\frac{x-3}{x-1}=2$$

$$\frac{(x-1)^2+(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)}=2$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1 + x^2 - 9}{(x+3)(x-1)} = 2 \mid \cdot (x+3)(x-1), x \neq -3, x \neq 1.$$

$$2x^2 - 2x - 8 = 2(x+3)(x-1)$$

$$2x^2 - 2x - 8 = 2(x^2 + 3x - x - 3)$$

$$2x^2 - 2x - 8 = 2x^2 + 4x - 6$$

$$-6x = -6 + 8$$

$$x = -\frac{1}{3}.$$

Shembulli 26. $\frac{2x-1}{2x-3} + \frac{3x-1}{3x-2} - 2 = 0.$

Zgjidhja.

$$\frac{2x-1}{2x-3} + \frac{3x-1}{3x-2} - 2 = 0$$

$$\frac{(2x-1)(3x-2) + (2x-3)(3x-1) - 2(2x-3)(3x-2)}{(2x-3)(3x-2)} = 0$$

$$\frac{6x^2 - 4x - 3x + 2 + 6x^2 - 2x - 9x + 3 - 2(6x^2 - 4x - 9x + 6)}{(2x-3)(3x-2)} = 0$$

$$\frac{12x^2 - 18x + 5 - 12x^2 + 26x - 12}{(2x-3)(3x-2)} = 0 \mid \cdot (2x-3)(3x-2), x \neq \frac{3}{2}, x \neq \frac{2}{3}$$

$$8x - 7 = 0.$$

$$x = \frac{7}{8}.$$

Shembulli 27. $\frac{1-x}{2x(x-2)} - \frac{5-x}{2x^2-4x} = \frac{1}{x+2}.$

Zgjidhja.

$$\frac{1-x}{2x(x-2)} - \frac{5-x}{2x^2-4x} = \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1-x}{2x(x-2)} - \frac{5-x}{2x(x-2)} - \frac{1}{x+2} = 0$$

$$\frac{(1-x)(x+2) - (5-x)(x+2) - 2x(x-2)}{2x(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\frac{(x+2)(1-x-(5-x))-2x^2+4x}{2x(x-2)(x+2)}=0$$

$$\frac{(x+2)(1-x-5+x)-2x^2+4x}{2x(x-2)(x+2)}=0$$

$$\frac{-4x-8-2x^2+4x}{2x(x-2)(x+2)}=0$$

$$\frac{-2x^2-8}{2x(x-2)(x+2)}=0 \mid \cdot 2x(x-2)(x+2), x \neq 0, x \neq 2, x \neq -2$$

$$-2x^2-8=0 \mid : (-2) \text{ prej nga merret } x^2+4=0.$$

Por $x^2+4 > 0$ d.m.th. barazimi nuk ka zgjidhje.

2. ZBATIMI I BARAZIMEVE LINEARE

Detyra 28. Një numër është për 24 më i madh se numri i dytë. Nëse dihet se shuma e tyre është 100, të caktohen ata numra.

Zgjidhja.

Le të jetë x numri i parë. Meqë numri x është për 24 më i madh se numri i dytë atëherë numri i dytë do të jetë $x-24$.

Meqë shuma e këtyre dy numrave do të jetë 100 merret $x+(x-24)=100 \Leftrightarrow 2x=124$ prej nga $x=62$.

Pra, numri i parë është 62, kurse numri i dytë është $62-24=48$.

Detyra 29. Udhëtari i drejtohet bariut që ruante delet me këto fjalë:
“O bari me 100 dele...”

Bariu ia ktheu:

“Nuk janë 100, por sikur të ishin edhe kaq, edhe sa gjysma e tyre, edhe sa çereku i tyre, me mua së bashku do të bënin 100”.

Sa dele ka bariu?

Zgjidhja.

Le të shënojmë me x – numrin e deleve, dhe le të paraqesim në gjuhën e matematikës atë që tha bariu.

... po të ishin edhe kaq ..., d.m.th. $x+x$

... edhe sa gjysma e tyre ..., d.m.th. $x + x + \frac{1}{2}x$

... edhe sa çereku i tyre, d.m.th. $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x$

... me mua së bashku, pra $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1$

do të bënin 100.

D.m.th. merret barazimi

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$$

$$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 99$$

$$\frac{8x + 2x + x}{4} = 99$$

$$\frac{11x}{4} = 99$$

Pas zgjidhjes merret $x = 36$.

Pra, bariu kishte 36 dele.

Detyra 30. Mbishkrimi në varrin e matematikanit të njohur të kohës antike Diofantin ka këtë përmbajtje:

“Udhëtarë, Diofanti, një të gjashtën e jetës së tij e kaloi në fëmijëri pa brenga. Një të dymbëdhjetën e kaloi në rini. Një të shtatën e kaloi në martesë pa fëmijë. Pasi kaluan edhe pesë vite, u gëzua për lindjen e djalit i cili për fat të keq jetoi vetëm sa gjysma e të atit. I pikëlluar thellë për të birin vdiq katër vite pas tij”

Sa vite jetoi Diofanti?

Zgjidhja.

Le të shënojmë me x – numrin e viteve që jetoi Diofanti. Merret barazimi:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4.$$

Pas zgjidhjes merret $x = 84$. Pra, Diofanti jetoi 84 vite.

Detyra 31. Është dhënë thyesa $\frac{3}{5}$.

a) Cilin numër duhet t'ia shtojmë numëruesit dhe emëruesit që të merret thyesa $\frac{9}{10}$?

b) Cilin numër duhet t'ia shtojmë thyesës që të merret thyesa $\frac{9}{10}$?

Zgjidhja.

a) Le të jetë x – numri që duhet shtuar numëruesit dhe emëruesit. Merret barazimi:

$$\frac{3+x}{5+x} = \frac{9}{10}$$

$$10(3+x) = 9(5+x)$$

$$30+10x = 45+9x$$

$$x = 15.$$

b) Le të jetë x – numri që duhet shtuar thyesës. Merret:

$$\frac{3}{5} + x = \frac{9}{10}$$

$$x = \frac{9}{10} - \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{3}{10}.$$

Detyra për ushtrime

Të zgjidhen barazimet:

1. $2 + 3x = 5.$

2. $3x + 4 = -2x - 6.$

3. $x + 3 = 3x + 1.$

4. $2x + (2x + 3) = 4x - 1 + 2x - 3 + (7 - 2x).$

5. $0.2 \cdot (x - 1) + 0.5(3x - 9) = \frac{x}{3} - 2.$

6. $\frac{x}{3} + \frac{2x - 1}{6} = 1 - \frac{x}{3}.$

7. $7 - 2x - \frac{1 - 3x}{7} = 2 - \frac{2x - 1}{3}.$

8. $\frac{3x - 1}{5} - \frac{13 - x}{2} = \frac{7x}{3} - \frac{11(x + 3)}{6}.$

9. $\frac{7 + 9x}{4} - \left(1 - \frac{2 - x}{9}\right) = 7x.$

10. $\frac{x - 5}{4} + \frac{x - 7}{2} + \frac{x - 6}{3} = 3.$

11. $\frac{3(x + 1)}{2} - \frac{2(x - 3)}{5} + 2x - 1 = \frac{31x}{10} + 4.$

12. $x - \left(\frac{3y + 1}{5} - \frac{2x - 7}{2}\right) = 5 - \frac{x + 6}{2}.$

13. $\frac{1 + \frac{x}{4}}{2} + \frac{\frac{7x}{2} + 1}{6} - \frac{1 + 5x}{24} - \frac{\frac{7}{2} + 6x}{12} = \frac{1}{3}.$

14. $\frac{1 - \frac{6 - x}{3}}{2} + x - \frac{\frac{x}{2} - \frac{3 + x}{4}}{2} = 3.$

15. $\frac{x - 3}{x + 3} + \frac{3x - 1}{3x + 1} = 2.$

$$16. \frac{2x-9}{2x-5} + \frac{3x}{3x-2} = 2.$$

$$17. \frac{4x-1}{x-4} - \frac{5x}{3x-12} - \frac{6x-4}{5x-20} = 1 + \frac{x+1}{2x-8}.$$

$$18. \frac{x+1}{2x-1} - \frac{11x+5}{12(2x-1)} = \frac{x-3}{4-8x} + \frac{1}{6}.$$

$$19. \frac{1}{8x-16} + \frac{5-x}{8x-4x^2} = \frac{7}{8x} - \frac{x-1}{2x(x-2)}.$$

$$20. \frac{6x+5}{4x+3} - \frac{7-3x}{3-4x} = \frac{12x^2+30x-21}{16x^2-9}.$$

$$21. \frac{1}{4x-6} + \frac{1}{8x+12} - \frac{3(2x+1)}{4x^2-9} = 0.$$

$$22. \frac{1}{18x^2-30x} - \frac{1}{12x^2-20x} + \frac{3(x+1)}{18x^2-50} - \frac{1}{6x} = 0.$$

$$23. \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-4x+4} - \frac{1}{x^2+5x+6} = 0.$$

24. Një numër është për 18 më i madh se numri tjetër. Nëse shuma e tyre është 62, të caktohen numrat.
25. Shuma e tre numrave është 63. Numri i parë është dy herë më i madh se numri i dytë, kurse numri i tretë është gjashtë herë më i madh se numri i parë. Të cakrohen të tre numrat.
26. Shuma e tre numrave të njëpasnjëshëm është 69. Të caktohen ata numra.
27. Një numër është për 11 më i madh se numri tjetër. Të caktohen të dy numrat nëse trefishi i numrit të madh është për 4 më i madh se katërfishi i numrit të vogël.
28. Të caktohen të gjitha dyshet e numrave të plotë (x, y) për të cilët shuma dhe prodhimi janë të barabartë.

4

Fuqizimi dhe rrënjëzimi

1. FUQIA ME EKSPONENTË NUMËR TË PLOTË

Le të njehsojmë prodhimin $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

Vërejmë se numri 3 është përdorur katër herë si faktor.

Duke kryer shumëzimin përfundojmë se $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Një mënyrë më e përshtatshme për të shënuar prodhimin $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ është 3^4 .

Pra

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

Shënimi 3^4 lexohet: **3 në fuqinë e 4-të**

Numri 3 quhet **baza** e fuqisë 3^4 .

Numri 4 quhet **eksponenti** i fuqisë 3^4 .

Në shprehjen 3^4 numri 4 tregon se sa herë baza 3 është përdorur si faktor.

Kështu

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ - paraqet **formën e zgjeruar**

3^4 - paraqet **formën e fuqisë**

81 - paraqet **formën standarde**.

Duke u bazuar në shembullin e mësipërm, arrijmë tek rasti i përgjithshëm:

Le të jetë $n \in \mathbb{N}$. Për çdo numër real a kemi:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-faktor}}$$

Në këtë rast numri a paraqet bazën kurse numri n -fuqinë.

Shembulli 1. Shprehjet vijuese të paraqiten në formë të fuqisë:

$$a) 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2;$$

$$b) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2};$$

$$c) \frac{3}{4};$$

$$d) \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{n\text{-faktor}};$$

$$e) \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3}}_{m\text{-faktor}};$$

$$f) \underbrace{\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}_{t\text{-faktor}}.$$

Zgjidhja.

a) Vërejmë se baza (numri) 2 është përdorur si faktor pesë herë. Pra kemi

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5.$$

b) Numri $\frac{1}{2}$ është përdorur tri herë si faktor, pra kemi

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

c) Numri $\frac{3}{4}$ është përdorur një herë si faktor, prandaj

$$\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^1.$$

d) Numri 3 është përdorur n herë si faktor, prandaj

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{n\text{-faktor}} = 3^n.$$

e) Numri $\frac{1}{3}$ është përdorur m herë si faktor, prandaj

$$\underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3}}_{m\text{-faktor}} = \left(\frac{1}{3}\right)^m.$$

f) Numri $-\frac{1}{4}$ është përdorur t herë si faktor, prandaj

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}_{t\text{-faktor}} = \left(-\frac{1}{4}\right)^t.$$

Shembulli 2. Shprehjet vijuese të paraqiten në formën e zgjeruar.

$$\begin{array}{lll} a) 3^6; & b) (-2)^5; & c) \left(-\frac{1}{3}\right)^1; \\ d) 4^n; & e) 5^m; & f) (-6)^s. \end{array}$$

Zgjidhja.

a) Meqë baza është 3 kurse fuqia 6, atëherë numri 3 do të jetë 6 herë faktor, prandaj

$$3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

b) Numri -2 do të jetë 5 herë faktor, prandaj

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2).$$

c) Numri $\left(-\frac{4}{3}\right)$ do të jetë një herë faktor, prandaj

$$\left(-\frac{4}{3}\right)^1 = -\frac{4}{3}.$$

d) Numri 4 do të jetë n herë faktor, prandaj

$$4^n = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4}_{n\text{-faktor}}.$$

e) Numri 5 do të jetë m -herë faktor, pra

$$5^m = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 5}_{m\text{-faktor}}.$$

f) Numri -6 do të jetë s -herë faktor, prandaj

$$(-6)^s = \underbrace{(-6) \cdot (-6) \cdot \dots \cdot (-6)}_{s\text{-faktor}}.$$

Detyra plotësuese

Shprehjet vijuese të paraqiten në formë të fuqisë:

1. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

2. $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{3}$

3. $0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot 0.7$

4. $(-0.4) \cdot (-0.4) \cdot (-0.4)$ 5. $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$

6. $\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}_{n\text{-faktor}}$

7. $\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}_{m\text{-faktor}}$

Shprehjet vijuese të paraqiten në formën e zgjeruar.

8. $(-2)^5$

9. $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

10. $(-0.5)^2$

11. $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$

12. $\left(-\frac{7}{3}\right)^1$

13. $\left(\frac{3}{2}\right)^n$

14. 6^{n+1}

15. $(-3)^{n+s}$

Në shembujt e mëparshëm pamë se:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}$$

Po ashtu

$$\left(-\frac{4}{3}\right)^1 = -\frac{4}{3}$$

Përfundojmë se:

Për çdo numër real a vlen:

$$a^1 = a.$$

Shembulli 3. Njehsoni:

a) 1^7 ;

b) $(-1)^6$;

c) $(-1)^7$.

Zgjidhja.

Kemi:

a) $1^7 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}_{7\text{-faktor}} = 1.$

$$b) (-1)^6 = \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_1 \cdot \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_1 \cdot \underbrace{(-1) \cdot (-1)}_1 = 1.$$

$$c) (-1)^7 = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)}_{6\text{-faktor}} \cdot (-1) = (-1)^6 \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Përfundojmë se

$1^n = 1$, për çfarëdo numri natyror n .

$(-1)^n = 1$, nëse n është numër natyror çift.

$(-1)^n = -1$, nëse n është numër natyror tek.

Shembulli 4. Le të njehsojmë:

$$a) (-3)^4, \quad b) (-3)^3.$$

Zgjidhja.

a) Numrin $(-3)^4$ e paraqesim në formën e zgjeruar.

Merret:

$$\begin{aligned} (-3)^4 &= (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \\ &= (-1) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 3 \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (-1)^4 \cdot 3^4 \end{aligned}$$

Pak më sipër pamë se $(-1)^4 = 1$. Prandaj

$$(-3)^4 = 3^4.$$

b) Ngjashëm veprojmë me numrin $(-3)^3$.

Merret:

$$\begin{aligned} (-3)^3 &= (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-1) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 3 \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (-1)^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

Meqë $(-1)^3 = -1$ përfundojmë se:

$$(-3)^3 = -1 \cdot 3^3 = -3^3.$$

Japim këtë përgjithësim:

Nëse n është numër natyror çift, $(-a)^n = a^n$.

Nëse n është numër natyror tek, $(-a)^n = -a^n$.

Shembulli 5. Njehsoni:

$$\begin{aligned} a) & 1^{15}; & b) & 1^{12}; & c) & (-1)^{15}; & d) & (-1)^{14}; \\ e) & -(-1)^{13}; & f) & -(-1)^{12}; & g) & 1^{12} - (-1)^{11} + (-1)^{10}; \\ h) & 1^4 - (-1)^3 - (-1)^1 + (-1)^7. \end{aligned}$$

Zgjidhja.

a) Meqë 1 në çfarëdo fuqie është 1 atëherë $1^{15} = 1$.

b) $1^{12} = 1$.

c) Meqë 15 është numër tek, dhe meqë -1 i ngritur në fuqinë numër tek është -1 kemi $(-1)^{15} = -1$.

d) $(-1)^{14} = 1$.

e) $-(-1)^{13} = -(-1) = 1$.

f) $-(-1)^{12} = -1$.

g) $1^{12} - (-1)^{11} + (-1)^{10} = 1 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$.

h) $1^4 - (-1)^3 - (-1)^1 + (-1)^7 = 1 - (-1) - (-1) + (-1) = 1 + 1 + 1 - 1 = 2$.

Shembulli 6. Njehsoni:

$$\begin{aligned} a) & (-2)^3; & b) & (-2)^4; & c) & -(-2)^5; \\ d) & \left(-\frac{1}{4}\right)^3; & e) & \left(-\frac{3}{2}\right)^2; & f) & \left(-\frac{1}{3}\right)^4; \\ g) & (-2)^3 - (-2)^4 + (-3)^4 + (-3)^3; \\ h) & \left(1\frac{1}{2}\right)^3 - \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^1; \\ i) & \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3. \end{aligned}$$

Zgjidhja.

a) Meqë 3 është numër tek kemi $(-2)^3 = -2^3 = -8$.

b) Meqë 4 është numër çift kemi $(-2)^4 = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

c) $-(-2)^5 = -(-2^5) = 2^5 = 32$.

$$d) \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\left(\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{64}.$$

$$e) \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

$$f) \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}.$$

$$g) (-2)^3 - (-2)^4 + (-3)^4 + (-3)^3 = -2^3 - 2^4 + 3^4 + (-3^3) = -8 - 16 + 81 - 27 = 30.$$

$$h) \left(1\frac{1}{2}\right)^3 - \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{27}{8} - \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = \frac{27 - 9 \cdot 2 - 1 \cdot 4}{8} = \frac{27 - 18 - 4}{8} = \frac{5}{8}.$$

$$i) \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{1 + 1 \cdot 8}{16} = \frac{9}{16}.$$

Detyra plotësuese

Njehsoni:

16. 1^{13} .

17. 1^{10} .

18. $(-1)^7$.

19. $(-1)^6$.

20. $-(-1)^5$.

21. $-(-1)^4$.

22. $1^4 - (-1)^3 + (-1)^2$.

23. $1^8 - (-1)^9 - (-1) + (-1)^3$.

Njehsoni

24. $(-3)^2$.

25. $(-2)^5$.

26. $-(-3)^3$.

27. $(-0.5)^2$.

28. $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$.

29. $-\left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

30. $(-2)^2 - (-2)^3 + (-3)^3 - 3^2$. **31.** $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$.

Shembulli 7. Njehsoni $2^3 \cdot 2^4$.

Zgjidhja.

$$2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3\text{-faktor}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{4\text{-faktor}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{7\text{-faktor}}.$$

D.m.th. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$.

Në përgjithësi vlen:

Për çdo numër realë a vlen:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, m, n \in \mathbb{N}.$$

Shembulli 8. Të njehsohet prodhimi i fuqive:

$$\begin{array}{lll} a) 3^3 \cdot 3^5; & b) 4^2 \cdot 4^3; & c) 5^2 \cdot 5^4; \\ d) x^2 \cdot x^9; & e) a \cdot a^9; & f) (a+b) \cdot (a+b)^4; \\ g) \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2; & h) \left(\frac{x+y}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{x+y}{3}\right)^5. \end{array}$$

Zgjidhja.

Zbatojmë vetinë e mësipërme:

$$a) 3^3 \cdot 3^5 = 3^{3+5} = 3^8.$$

$$b) 4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5.$$

$$c) 5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6.$$

$$d) x^2 \cdot x^9 = x^{2+9} = x^{11}.$$

$$e) \text{Meqë } a^1 = a, \text{ prandaj } a \cdot a^9 = a^1 \cdot a^9 = a^{1+9} = a^{10}.$$

$$f) (a+b) \cdot (a+b)^4 = (a+b)^1 \cdot (a+b)^4 = (a+b)^{1+4} = (a+b)^5.$$

$$g) \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^{3+2} = \left(\frac{x}{2}\right)^5.$$

$$h) \left(\frac{x+y}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{x+y}{3}\right)^5 = \left(\frac{x+y}{3}\right)^{0+5} = \left(\frac{x+y}{3}\right)^5.$$

Detyra plotësuese

Njehsoni:

32. $3^2 \cdot 3^1$.

33. $2 \cdot 2^5$.

34. $2^0 \cdot 2^1$.

35. $A^3 \cdot A^5$.

36. $(a-1)^2 \cdot (a-1)^3$.

37. $(a-b)^2 \cdot (a-b)$.

38. $\left(\frac{x}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2$.

39. $\left(\frac{x-y}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{x-y}{2}\right)^5$.

40. $(x-1)^0 \cdot (x-1)^0$.

Mbani në mend

Prodhimi $x^2 \cdot x^5$ është baraz me x^7 . Por x^7 mund të paraqitet edhe në forma të tjera, p.sh.

$$x^7 = x \cdot x^2 \cdot x^4, x^7 = x^3 \cdot x^4, x^7 = x \cdot x^6.$$

Në disa raste, mënyra e shënimit lehtëson njehsimet me fuqi.

P.sh. nëse duam të njehsojmë 2^9 këtë mund ta bëjmë si vijon:

$$2^9 = 2^{3+3+3} = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 64 \cdot 8 = 512.$$

Provoni të njehsoni 2^9 duke njehsuar prodhimin $2^2 \cdot 2^7$.

Shembulli 9. Njehsoni:

a) 2^8 ;

b) 2^{10} ;

c) 3^5 ;

d) 3^7 ;

e) $2^4 \cdot 3^2$;

f) $4^3 \cdot 3^2$.

Zgjidhja.

$$a) 2^8 = 2^{2+2+2+2} = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = \underbrace{4 \cdot 4}_{16} \cdot \underbrace{4 \cdot 4}_{16} = 16 \cdot 16 = 256.$$

$$b) 2^{10} = 2^8 \cdot 2^2 = 256 \cdot 4 = 1024.$$

$$c) 3^5 = 3^{2+2+1} = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3 = 9 \cdot 9 \cdot 3 = 81 \cdot 3 = 243.$$

$$d) 3^7 = 3^5 \cdot 3^2 = 243 \cdot 9 = 2187.$$

$$e) 2^4 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 4 \cdot 9 = 16 \cdot 9 = 144.$$

$$f) 4^3 \cdot 3^2 = 4^{2+1} \cdot 3^2 = 4^2 \cdot 4 \cdot 9 = 16 \cdot 36 = 576.$$

Shembulli 10. Shprehjet e dhëna të shprehen si fuqi me bazë 2.

a) $64 \cdot 2^3$;

b) $16 \cdot 128$;

c) $100 + 28$.

Zgjidhja.

$$a) 64 \cdot 2^3 = 16 \cdot 4 \cdot 2^3 = 2^4 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^{4+2+3} = 2^9.$$

$$b) 16 \cdot 128 = 16 \cdot 2 \cdot 64 = 2^4 \cdot 2 \cdot 2^6 = 2^{4+1+6} = 2^{11}.$$

c) Nëse këtë rast mundohem ta zgjidhim sikur rastet paraprake do të vërejmë se një gjë e tillë është e pamundur sepse numrat 100,28 nuk mund të shprehen si fuqi të numrit 2.

Prandaj, së pari mbledhim numrat e dhënë dhe rezultatin që merret e paraqesim në formë të fuqive të numrit 2.

$$100 + 28 = 128 = 2 \cdot 64 = 2 \cdot 4 \cdot 16 = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^4 = 2^7.$$

Shembulli 11. Shprehjet e dhëna të shprehen si fuqi me bazë 3.

$$a) 27 \cdot 3^2;$$

$$b) 81 \cdot 3^5;$$

$$c) 60 + 21.$$

Zgjidhja.

Veprojmë si në shembullin paraprak.

$$a) 27 \cdot 3^2 = 3^3 \cdot 3^2 = 3^5.$$

$$b) 81 \cdot 3^5 = 9 \cdot 9 \cdot 3^5 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+2+5} = 3^9.$$

$$c) 60 + 21 = 81 = 9 \cdot 9 = 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2} = 3^4.$$

Shembulli 12. Shprehjet e dhëna të shprehen si prodhim i fuqive me bazë 2 dhe 3.

$$a) 36 \cdot 72;$$

$$b) 108 \cdot 36;$$

$$c) 64 \cdot 6 \cdot 12.$$

Zgjidhja.

a) Së pari, pasi ta shprehim numrin 36 në faktor të thjesht merret:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2.$$

Ngjashëm veprojmë me numrin 72. Merret:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2.$$

Prandaj,

$$36 \cdot 72 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 2^5 \cdot 3^4.$$

b) Meqë $108 = 36 \cdot 3 = \underbrace{2^2 \cdot 3^2}_{36} \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$, atëherë

$$108 \cdot 36 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 2^4 \cdot 3^5.$$

c) Meqë $64 = 2^6$; $6 = 2 \cdot 3$; $12 = 2^2 \cdot 3$ merret:

$$64 \cdot 6 \cdot 12 = 2^6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^6 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^9 \cdot 3^2.$$

Detyra plotësuese

Njehsoni:

41. 2^7 .	42. 2^9 .	43. 4^3 .	44. 3^6 .
45. 3^8 .	46. $2^3 \cdot 3$.	47. $3^4 \cdot 2^4$;	48. $2^0 \cdot 2^3 \cdot 3^2$.

Shprehjet e dhëna të shprehen si fuqi me bazën 2.

49. $16 \cdot 2^5$.	50. $8 \cdot 2^3$.	51. $128 \cdot 128$.
52. $64 \cdot 32$.	53. $64 + 32$.	54. $30 + 34$.

Shprehjet e dhëna të shprehen si fuqi me bazën 3.

55. $81 \cdot 3$.	56. $9 \cdot 3^4$.	57. $243 \cdot 3^3$.
58. $27 \cdot 81$.	59. $27 + 81$.	60. $50 + 31$.

Shprehjet e dhëna të shprehen si prodhim të fuqive me bazë 2 dhe 3.

61. $24 \cdot 9$.	62. $48 \cdot 27$.	63. $48 \cdot 54$.
64. $24 \cdot 27 \cdot 36$.	65. $144 \cdot 12$.	66. $18 \cdot 36$.

Shembulli 13. Të njehsohet herësi $4^5 : 4^3$.**Zgjidhja.**

$$\text{Kemi } 4^5 : 4^3 = \frac{4^5}{4^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = 4^2.$$

D.m.th.

$$4^5 : 4^3 = \frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2.$$

Në përgjithësi vlen:

Le të jetë a numër real i ndryshëm nga 0 dhe $m, n \in N$. Vlen:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Në qoftë se në rregullën e mësipërme merret $m = n$ atëherë do të kemi:

$$a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m}.$$

Meqë

$$a^{m-m} = a^0$$

dhe

$$\frac{a^m}{a^m} = 1$$

atëherë përfundojmë se:

Për çdo numër real a të ndryshëm nga 0 ven:

$$a^0 = 1.$$

Shembulli 14. Të njehsohet herësi i fuqive:

$$a) \frac{2^7}{2^4};$$

$$b) 3^6 : 3;$$

$$c) a^5 : a^2;$$

$$d) a^{11} : a; \quad e) (a-b)^4 : (a-b)^3; \quad f) \left(\frac{a^2}{3}\right)^3 : \left(\frac{a^2}{3}\right)^0.$$

Zgjidhja.

$$a) \frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4} = 2^3.$$

$$b) 3^6 : 3 = 3^6 : 3^1 = 3^{6-1} = 3^5.$$

$$c) a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3.$$

$$d) a^{11} : a = a^{11} : a^1 = a^{11-1} = a^{10}.$$

$$e) (a-b)^4 : (a-b)^3 = (a-b)^{4-3} = (a-b)^1 = a-b.$$

$$f) \left(\frac{a^2}{3}\right)^3 : \left(\frac{a^2}{3}\right)^0 = \left(\frac{a^2}{3}\right)^3 : 1 = \left(\frac{a^2}{3}\right)^3.$$

Detyra plotësuese

Njehsoni:

$$67. \frac{2^6}{2^4}.$$

$$68. \frac{3^5}{3^2}.$$

$$69. a^{12} : a^5.$$

$$70. \frac{(ax)^9}{(ax)^8}.$$

$$71. \frac{(b-x)^4}{(b-x)^4}.$$

$$72. \left(\frac{a+b}{2}\right)^5 : \left(\frac{a+b}{2}\right)^1.$$

$$73. \left(\frac{a^2}{4}\right)^4 : \left(\frac{a^2}{4}\right)^0 \qquad 74. \left(\frac{x-y}{3}\right)^5 : \left(\frac{x-y}{3}\right).$$

Shembulli 15. Njehsoni:

$$a) 4^7 : 4^3; \qquad b) 6^5 : 6^4; \qquad c) 16^2 : 4^3.$$

Zgjidhja.

$$a) 4^7 : 4^3 = 4^{7-3} = 4^4 = 4^2 \cdot 4^2 = 16 \cdot 16 = 256.$$

$$b) 6^5 : 6^4 = 6^{5-4} = 6^1 = 6.$$

$$c) 16^2 : 4^3 = \frac{16^2}{4^3} = \frac{16 \cdot 16}{4^3} = \frac{4^2 \cdot 4^2}{4^2 \cdot 4} = \frac{4^2}{4} = 4^{2-1} = 4^1 = 4.$$

Detyra plotësuese

Njehsoni:

$$75. \frac{4^7}{4^2}.$$

$$76. 6^5 : 6^6.$$

$$67. 7^9 : 7^8.$$

$$78. \frac{16}{4^2}.$$

$$79. \frac{64^2}{4^6}.$$

$$80. \frac{81}{3^3}.$$

Shembulli 16. Njehsoni

$$a) (4^3)^2. \qquad b) (4^3)^4.$$

Çfarë mund të konkludojmë?

Zgjidhja.

$$a) (4^3)^2 = 4^3 \cdot 4^3 = 4^{3+3} = 4^{3 \cdot 2} = 4^6.$$

$$b) (4^3)^4 = \underbrace{4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3}_{4\text{-faktor}} = 4^{\overbrace{3+3+3+3}^{4\text{-mbledhës}}} = 4^{3 \cdot 4} = 4^{12}.$$

Për çdo numër real a vlen:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n\text{-faktor}} = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{n\text{-mbledhës}}} = a^{m \cdot n}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Shembulli 17. Fuqizoni fuqitë:

$$a) (3^2)^5; \qquad b) (a^2)^4; \qquad c) (a^5)^0; \qquad d) (x^5)^1;$$

$$e) (A^1)^{16}; \quad f) ((x-y)^3)^2; \quad g) \left(\left(\frac{x}{3} \right)^3 \right)^3.$$

Zgjidhja.

$$a) (3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}.$$

$$b) (a^2)^4 = a^{2 \cdot 4} = a^8.$$

$$c) (a^5)^0 = a^{5 \cdot 0} = a^0 = 1.$$

$$d) (x^5)^1 = x^{5 \cdot 1} = x^5.$$

$$e) (A^1)^{16} = A^{1 \cdot 16} = A^{16}.$$

$$f) ((x-y)^3)^2 = (x-y)^{3 \cdot 2} = (x-y)^6.$$

$$g) \left(\left(\frac{x}{3} \right)^3 \right)^3 = \left(\frac{x}{3} \right)^{3 \cdot 3} = \left(\frac{x}{3} \right)^9.$$

Shembulli 18. Të shkruhen si fuqi me bazën a shprehjet:

$$a) (a^5 \cdot a^4)^3;$$

$$b) a \cdot (a^2)^5;$$

$$c) \frac{(a^3)^2}{(a^2)^3};$$

$$d) \frac{a \cdot (a^2 \cdot a^3 \cdot a^4)^4}{a^{12}}.$$

Zgjidhja.

$$a) (a^5 \cdot a^4)^3 = (a^{5+4})^3 = (a^9)^3 = a^{9 \cdot 3} = a^{27}.$$

$$b) a \cdot (a^2)^5 = a \cdot a^{2 \cdot 5} = a \cdot a^{10} = a^{1+10} = a^{11}.$$

$$c) \frac{(a^3)^2}{(a^2)^3} = \frac{a^{3 \cdot 2}}{a^{2 \cdot 3}} = \frac{a^6}{a^6} = a^{6-6} = a^0 = 1.$$

$$d) \frac{a \cdot (a^2 \cdot a^3 \cdot a^4)^4}{a^{12}} = \frac{a \cdot (a^{2+3+4})^4}{a^{12}} = \frac{a \cdot (a^9)^4}{a^{12}} = \frac{a \cdot a^{36}}{a^{12}} = \frac{a^{37}}{a^{12}} = a^{37-12} = a^{25}.$$

Detyra plotësuese

Fuqizoni fuqitë:

$$81. (3^4)^2.$$

$$82. (2^5)^0.$$

$$83. (2^6)^1.$$

$$84. (5^0)^4.$$

$$85. ((a+b)^2)^2. \quad 86. \left(\left(\frac{x}{2} \right)^3 \right)^4. \quad 87. ((x-1)^1)^2. \quad 88. ((a-1)^0)^1.$$

Të shkruhen si fuqi me me bazën a shprehjet:

$$89. (a^1 \cdot a^5)^4. \quad 90. (a^2 \cdot a^7)^5. \quad 91. (a^0 \cdot a^1)^0.$$

$$92. \frac{(a^5)^3}{(a^3)^5}. \quad 93. \frac{a \cdot (a^0 \cdot a^1)^4 \cdot a^5}{a^6 \cdot a^7}. \quad 94. \frac{a^0 \cdot a^9}{a^9 \cdot a^0}.$$

Shembulli 19. Të njehsohet $(2 \cdot 3)^3$. Çfarë mund të konkludojmë?

Zgjidhja.

$$(2 \cdot 3)^3 = (2 \cdot 3)(2 \cdot 3)(2 \cdot 3) = (2 \cdot 2 \cdot 2)(3 \cdot 3 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3^3.$$

Në përgjithësi vlen

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n\text{-faktor të } ab} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n\text{-faktor të } a\text{-së}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{n\text{-faktor të } b\text{-së}} = a^n \cdot b^n.$$

Përfundojmë se:

Për çdo dy numra realë a, b vlen:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, n \in \mathbb{N}.$$

Shembulli 20. Shprehjet vijuese të paraqiten në formë të prodhimit të fuqive:

$$a) (2^3 \cdot 3^4)^5; \quad b) (2ab^2c^3)^4; \quad c) (-2x^3y^5z^7)^3.$$

Zgjidhja.

$$a) (2^3 \cdot 3^4)^5 = (2^3)^5 \cdot (3^4)^5 = 2^{3 \cdot 5} \cdot 3^{4 \cdot 5} = 2^{15} \cdot 3^{20}.$$

$$b) (2ab^2c^3)^4 = 2^4 \cdot a^4 \cdot (b^2)^4 \cdot (c^3)^4 = 2^4 \cdot a^4 \cdot b^{2 \cdot 4} \cdot c^{3 \cdot 4} = 2^4 \cdot a^4 \cdot b^8 \cdot c^{12}.$$

$$c) (-2x^3y^5z^7)^3 = (-2)^3 \cdot (x^3)^3 \cdot (y^5)^3 \cdot (z^7)^3 = (-2)^3 \cdot x^{3 \cdot 3} \cdot y^{5 \cdot 3} \cdot z^{7 \cdot 3}$$

$$= (-2)^3 \cdot x^9 \cdot y^{15} \cdot z^{21}.$$

Detyra plotësuese

Shprehjet vijuese të paraqiten në formë të prodhimit të fuqive:

$$95. (2^4 \cdot 3^2)^3. \quad 96. (2xy^2z^3)^5. \quad 97. (-3x^2 \cdot 5y^3)^4.$$

$$98. ((x+y)^2(x-y)^3)^4. \quad 99. (3^4 \cdot 4^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 9^0)^5. \quad 100. (2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^4)^5.$$

Shembulli 21. Fuqia $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ të paraqitet si herës i fuqive. Çfarë mund të konkludojmë?

Zgjidhja.

$$\text{Kemi } \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3^4}{2^4}.$$

Në përgjithësi kemi:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n\text{-faktor të } \frac{a}{b}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n\text{-faktor të } a\text{-së}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n\text{-faktor të } b\text{-së}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Përfundojmë se:

Për çdo dy numra realë a, b ashtu që $b \neq 0$, vlen:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Shembulli 22. Të kryhen fuqizimet:

$$a) \left(\frac{2^3}{3^4}\right)^5; \quad b) \left(\frac{4x^2}{3y^3}\right)^5; \quad c) \left(\frac{(x-2y)^2}{(x+2y)^3}\right)^4.$$

Zgjidhja.

$$a) \left(\frac{2^3}{3^4}\right)^5 = \frac{(2^3)^5}{(3^4)^5} = \frac{2^{3 \cdot 5}}{3^{4 \cdot 5}} = \frac{2^{15}}{3^{20}}.$$

$$b) \left(\frac{4x^2}{3y^3}\right)^5 = \frac{(4x^2)^5}{(3y^3)^5} = \frac{4^5 \cdot (x^2)^5}{3^5 \cdot (y^3)^5} = \frac{4^5 \cdot x^{2 \cdot 5}}{3^5 \cdot y^{3 \cdot 5}} = \frac{4^5 \cdot x^{10}}{3^5 \cdot y^{15}}.$$

$$c) \left(\frac{(x-2y)^2}{(x+2y)^3}\right)^4 = \frac{((x-2y)^2)^4}{((x+2y)^3)^4} = \frac{(x-2y)^{2 \cdot 4}}{(x+2y)^{3 \cdot 4}} = \frac{(x-2y)^8}{(x+2y)^{12}}.$$

Shembulli 23. Njehsoni

$$a) \left(2\frac{1}{2}\right)^3 : \left(3\frac{1}{3}\right)^3; \quad b) \left(1\frac{1}{5} : \left(-\frac{36}{10}\right)\right)^3.$$

Zgjidhja.

$$a) \left(2\frac{1}{2}\right)^3 : \left(3\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 : \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{2} : \frac{10}{3}\right)^3 = \left(\frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 10}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64};$$

$$b) \left(1\frac{1}{5} : \left(-\frac{36}{10}\right)\right)^3 = \left(\frac{6}{5} : \left(-\frac{36}{10}\right)\right)^3 = \left(\frac{\cancel{6}^1}{\cancel{5}_1} \cdot \left(-\frac{\cancel{10}^2}{\cancel{36}_6}\right)\right)^3 \\ = \left(-\frac{2}{6}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{3^3} = -\frac{1}{27}.$$

Detyra plotësuese

Të kryhen veprimet me fuqi:

101. $(2^4)^7 : (3^2)^5$.	102. $\left(\frac{2^5}{3^4}\right)^4$.	103. $\left(\frac{4x^2y^4}{5z^5}\right)^3$.
104. $\left(\frac{(x+a)^2}{(x-a)^3}\right)^5$.	105. $\left(\frac{x^7}{y^8}\right)^0$.	106. $\left(\frac{7^4 \cdot 8^5}{3^6}\right)^2$.

107. $\left(1\frac{1}{3}\right)^4 : \left(1\frac{3}{4}\right)^5$.	108. $\left(\left(1\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(2\frac{1}{4}\right)^3\right)^4$.
109. $\left(\left(1\frac{3}{4}\right)^2\right)^3 : \left(2\frac{1}{3}\right)^5$.	110. $\left(2^3 : \left(2\frac{1}{2}\right)^4\right)^5$.

Shembulli 24. Të njehsohet herësi $4^3 : 4^5$. Çfarë mund të konkludojmë?

Zgjidhja.

Në bazë të vetisë së mësuar më parë kemi:

$$4^3 : 4^5 = \frac{4^3}{4^5} = 4^{3-5} = 4^{-2}.$$

Por, ky rezultat paraqet risi në detyrat tona. Deri më tani patëm raste vetëm kur eksponenti është pozitiv.

Pra, sa është 4^{-2} ?

Le të shqyrtojmë edhe një herë shprehjen $4^3 : 4^5$.

$$4^3 : 4^5 = \frac{4^3}{4^5} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{4^2}.$$

Pra

$$4^3 : 4^5 = 4^{-2}$$

dhe

$$4^3 : 4^5 = \frac{1}{4^2}.$$

Prandaj kemi $4^{-2} = \frac{1}{4^2}$.

Përfundojmë se:

Për çdo numër real a të ndryshëm nga zero vlen:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Shembulli 25. A është i saktë pohimi $-2^{-3} = (-2)^{-3}$?

Zgjidhja.

Meqë $-2^{-3} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$ dhe $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$ përfundojmë se pohimi

është i saktë.

Shënim: Proveni të kuptoni pse në përgjithësi nuk vlen pohimi

$$-a^{-n} = (-a)^{-n} ?$$

Shembulli 26. Të njehsohet:

$$a) (2^{1-3n})^{-3}; \quad b) \frac{x^{n-9}}{x^{2n-3}}.$$

Zgjidhja.

$$a) (2^{1-3n})^{-3} = 2^{(1-3n)(-3)} = 2^{-3+9n} = 2^{9n-3}.$$

$$b) \frac{x^{n-9}}{x^{2n-3}} = x^{n-9-(2n-3)} = x^{n-9-2n+3} = x^{-n-6}.$$

Detyra plotësuese

Të kryhen veprimet me fuqi:

111. $\frac{4^5}{4^9}$.

112. $\frac{x^2}{x^7}$.

113. $\frac{(a+b)^3}{(a+b)^5}$.

114. $\left(\frac{4xy}{4^3 \cdot x^2 \cdot y^4}\right)^3$.

115. $\frac{(3^{-2}) \cdot (2^{-3})}{(2^{-4}) \cdot (3^{-3})}$.

116. $\left(\frac{4x^{-1}y^{-1}}{2^{-2}xy}\right)^{-1}$.

117. $(3^{1-n})^{-2}$.

118. $\frac{2^{n-3}}{2^{n-4}}$.

119. $\frac{4^{n-2}}{4^{3n}}$.

110. $\left(\frac{2^{n-4} \cdot 3^{n-3} \cdot 5^{n-2}}{2^{n-1} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n-3}}\right)^{-2}$.

Të thjeshtohen shprehjet:

Shembulli 27. $\frac{10^3 \cdot 3^6 \cdot 6^5 \cdot (5^{-4})^4}{((-12)^{-4})^{-4} \cdot 5^{-12} \cdot 3^{-1} \cdot (-7)^0}$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} & \frac{10^3 \cdot 3^6 \cdot 6^5 \cdot (5^{-4})^4}{((-12)^{-4})^{-4} \cdot 5^{-12} \cdot 3^{-1} \cdot (-7)^0} = \frac{(2 \cdot 5)^3 \cdot 3^6 \cdot (2 \cdot 3)^5 \cdot 5^{-4 \cdot 4}}{(-12)^{-4 \cdot (-4)} \cdot 5^{-12} \cdot 3^{-1}} \\ & = \frac{2^3 \cdot 5^3 \cdot 3^6 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^{-16}}{(-12)^{16} \cdot 5^{-12} \cdot 3^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 2^5 \cdot 3^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 5^{-16}}{(-1)^{16} \cdot 12^{16} \cdot 5^{-12} \cdot 3^{-1}} = \frac{2^{3+5} \cdot 3^{6+5} \cdot 5^{3-16}}{(3 \cdot 4)^{16} \cdot 5^{-12} \cdot 3^{-1}} \\ & = \frac{2^8 \cdot 3^{11} \cdot 5^{-13}}{3^{16} \cdot 4^{16} \cdot 5^{-12} \cdot 3^{-1}} = \frac{2^8 \cdot 3^{11} \cdot 5^{-13}}{(2^2)^{16} \cdot 3^{16} \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-12}} = \frac{2^8 \cdot 3^{11} \cdot 5^{-13}}{2^{32} \cdot 3^{16-1} \cdot 5^{-12}} = \frac{2^8}{2^{32}} \cdot \frac{3^{11}}{3^{15}} \cdot \frac{5^{-13}}{5^{-12}} \\ & = 2^{8-32} \cdot 3^{11-15} \cdot 5^{-13-(-12)} = 2^{-24} \cdot 3^{-4} \cdot 5^{-1} = \frac{1}{2^{24}} \cdot \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2^{24} \cdot 3^4 \cdot 5}. \end{aligned}$$

Shembulli 28. $\frac{2^3 \cdot (-7)^4 \cdot (3^{-2})^{-3}}{(4^{-2})^3 \cdot 49^2 \cdot (9^{-2})^{-1}}$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} & \frac{2^3 \cdot (-7)^4 \cdot (3^{-2})^{-3}}{(4^{-2})^3 \cdot 49^2 \cdot (9^{-2})^{-1}} = \frac{2^3 \cdot (-1)^4 \cdot 7^4 \cdot 3^{-2 \cdot (-3)}}{4^{-2 \cdot 3} \cdot (7^2)^2 \cdot 9^{-2 \cdot (-1)}} = \frac{2^3 \cdot 7^4 \cdot 3^6}{4^{-6} \cdot 7^4 \cdot 9^2} \\ & = \frac{2^3 \cdot 3^6}{(2^2)^{-6} \cdot (3^2)^2} = \frac{2^3 \cdot 3^6}{2^{-12} \cdot 3^4} = \frac{2^3}{2^{-12}} \cdot \frac{3^6}{3^4} = 2^{3-(-12)} \cdot 3^{6-4} = 2^{15} \cdot 3^2. \end{aligned}$$

Shembulli 29. $\frac{81 \cdot x^{-4} \cdot y^{-3} \cdot (z^{-2})^{-1}}{27 \cdot x^{-7} \cdot (y^3)^{-2} \cdot (z^{-1})^2}$.

Zgjidhja.

$$\frac{81 \cdot x^{-4} \cdot y^{-3} \cdot (z^{-2})^{-1}}{27 \cdot x^{-7} \cdot (y^3)^{-2} \cdot (z^{-1})^2} = \frac{3^4 \cdot x^{-4} \cdot y^{-3} \cdot z^{-2(-1)}}{3^3 \cdot x^{-7} \cdot y^{3(-2)} \cdot z^{-1 \cdot 2}} = \frac{3 \cdot x^{-4} \cdot y^{-3} \cdot z^2}{x^{-7} \cdot y^{-6} \cdot z^{-2}}$$

$$= 3 \cdot x^{-4-(-7)} \cdot y^{-3-(-6)} \cdot z^{2-(-2)} = 3 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z^4.$$

Shembulli 30. $\left(\frac{a^{-2}}{b^{-4}}\right) : \left(\frac{a^{-5}}{b^{-7}}\right)^{-3}$.

Zgjidhja.

$$\left(\frac{a^{-2}}{b^{-4}}\right) : \left(\frac{a^{-5}}{b^{-7}}\right)^{-3} = \left(\frac{a^{-2}}{b^{-4}}\right) : \frac{(a^{-5})^{-3}}{(b^{-7})^{-3}} = \frac{a^{-2}}{b^{-4}} : \frac{a^{-5(-3)}}{b^{-7(-3)}} = \frac{a^{-2}}{b^{-4}} : \frac{a^{15}}{b^{21}} = \frac{a^{-2}}{b^{21}}$$

$$= \frac{a^{-2} \cdot b^{21}}{a^{15} \cdot b^{-4}} = a^{-2-15} \cdot b^{21-(-4)} = a^{-17} \cdot b^{25}.$$

Shembulli 31. Të thjeshtohet shprehja $A = \frac{x^3 \cdot y^{-2} \cdot (x^{-1} \cdot y^{-3})^4 \cdot x \cdot (y^{-3})^2}{(x^2 \cdot y^{-3})^2 \cdot (x \cdot y^{-3})^2}$

dhe të njehsohet vlera e saj nëse $x = 4$, $y = \frac{1}{2}$.

Zgjidhja.

$$A = \frac{x^3 \cdot y^{-2} \cdot (x^{-1} \cdot y^{-3})^4 \cdot x \cdot (y^{-3})^2}{(x^2 \cdot y^{-3})^2 \cdot (x \cdot y^{-3})^2} = \frac{x^3 \cdot y^{-2} \cdot (x^{-1})^4 \cdot (y^{-3})^4 \cdot x \cdot (y^{-3})^2}{(x^2)^2 \cdot (y^{-3})^2 \cdot x^2 \cdot (y^{-3})^2}$$

$$= \frac{x^3 \cdot y^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-12} \cdot x \cdot y^{-6}}{x^4 \cdot y^{-6} \cdot x^2 \cdot y^{-6}} = \frac{x^{3-4+1} \cdot y^{-2-12-6}}{x^{4+2} \cdot y^{-6-6}} = \frac{x^0 \cdot y^{-20}}{x^6 \cdot y^{-12}}$$

$$= x^{-6} \cdot y^{-20-(-12)} = x^{-6} \cdot y^{-8}.$$

Meqë $x = 4$, $y = \frac{1}{2}$ merret

$$A = (4^{-6}) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} = \frac{1}{4^6} \cdot (2^{-1})^{-8} = \frac{1}{4^6} \cdot 2^8 = \frac{2^8}{(2^2)^6} = \frac{2^8}{2^{12}} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

Shembulli 32. Të thjeshtohet shprehja

$$\left(\frac{x + x^{-2}}{x^{-2} - x^{-1} + 1} + \frac{1 + x^{-1}}{x^{-2} + 2x^{-1} + 1}\right) \cdot \frac{1 + x^{-1}}{1 - x^{-1}}.$$

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{x+x^{-2}}{x^{-2}-x^{-1}+1} + \frac{1+x^{-1}}{x^{-2}+2x^{-1}+1} \right) \cdot \frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}} = \left(\frac{x+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1} + \frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x}+1} \right) \cdot \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \\
& = \left(\frac{\frac{x^3+1}{x^2}}{\frac{1-x+x^2}{x^2}} + \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{1+2x+x^2}{x^2}} \right) \cdot \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \left(\frac{x^3+1}{x^2-x+1} + \frac{x(x+1)}{x^2+2x+1} \right) \cdot \frac{x+1}{x-1} \\
& = \left(\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} \right) \cdot \frac{x+1}{x-1} \\
& = \left((x+1) + \frac{x}{x+1} \right) \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+1)^2+x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2+2x+1+x}{x-1} = \frac{x^2+3x+1}{x-1}.
\end{aligned}$$

2. RRËNJËZIMI – FUQIA ME EKSPONENT NUMËR RACIONAL

Le të jetë a numër real dhe n numër natyror.

Zgjidhja e barazimit

$$x^n = a \quad (1)$$

sipas x (nëse ekziston) quhet rrënjë e n – të e numrit a .

Shënohet

$$x = (\sqrt[n]{a})^n = a \quad (2)$$

(këtu supozohet se $\sqrt[n]{a}$ ekziston).

Nëse a është numër i çfarëdoshëm real, atëherë

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (3)$$

Nëse $a \geq 0$ dhe m, n numra natyrorë, atëherë

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \quad (4)$$

Le të jetë a, b numra realë pozitiv dhe m, n numra natyrorë, atëherë

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (5)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (6)$$

Shembulli 1. Njehsoni:

$$a) \sqrt{36} + 4\sqrt{49} + \sqrt[3]{8} - \sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{-1};$$

$$b) \sqrt{\frac{16}{9}} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}} + \sqrt[3]{64} - \sqrt{25} + \sqrt{(-3)^2};$$

$$c) \left(\sqrt{\frac{25}{36}} + \sqrt[3]{-8} \right) + (\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[5]{-32}).$$

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
 a) \quad \sqrt{36} + 4\sqrt{49} + \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{-1} &= 6 + 4 \cdot 7 + \sqrt[3]{2^3} - \sqrt[3]{2^5} + 1 - (-1) \\
 &= 6 + 28 + 2 - 2 + 2 = 36.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad \sqrt{\frac{16}{9}} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}} + \sqrt[3]{64} - \sqrt{25} + \sqrt{(-3)^2} &= \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} - \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} + \sqrt[3]{4^3} - 5 + |-3| \\
 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 4 - 5 + 3 = 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad \left(\sqrt{\frac{25}{36}} + \sqrt[3]{-8} \right) + (\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{-27} \cdot \sqrt[5]{-32}) &= \left(\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} + \sqrt[3]{(-2)^3} \right) + (3 \cdot \sqrt[3]{(-3)^3} \cdot \sqrt[5]{(-2)^5}) \\
 &= \left(\frac{5}{6} + (-2) \right) + (3(-3)(-2)) = \frac{101}{6}.
 \end{aligned}$$

Njehsoni:

$$\text{Shembulli 3. } a) \sqrt{8} \cdot \sqrt{32}; \quad b) 3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{8}; \quad c) \sqrt{x^{m+2}} \cdot \sqrt{x^{m-2}}.$$

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
 a) \quad \sqrt{8} \cdot \sqrt{32} &= \sqrt{4 \cdot 2} \cdot \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \\
 &= 8(\sqrt{2})^2 = 8 \cdot 2 = 16.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad 3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{8} &= 3\sqrt{2 \cdot 3} \cdot 2\sqrt{4 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 6(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \\
 &= 12 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 24\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

$$c) \quad \sqrt{x^{m+2}} \cdot \sqrt{x^{m-2}} = \sqrt{x^{m+2} \cdot x^{m-2}} = \sqrt{x^{m+2+m-2}} = \sqrt{x^{2m}} = \sqrt{(x^m)^2} = |x^m|.$$

$$\text{Shembulli 4. } \left(3^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \left(3^{\frac{2}{3}} - 6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \right).$$

Zgjidhja.

$$\begin{aligned}
 \left(3^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \left(3^{\frac{2}{3}} - 6^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \right) &= (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2^2}) \\
 &= (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}) = (\sqrt[3]{3})^3 + (\sqrt[3]{2})^3 = 5.
 \end{aligned}$$

Të racionalizohet emëruesi i thyesave:

Shembulli 5. a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{10}{\sqrt{5}}$; c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; d) $\frac{2}{\sqrt[5]{7}}$.

Zgjidhja.

$$a) \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$b) \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5};$$

$$c) \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3};$$

$$d) \frac{2}{\sqrt[5]{7}} = \frac{2}{\sqrt[5]{7}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^4}}{\sqrt[5]{7^4}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{7^4}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{2\sqrt[5]{7^4}}{7}.$$

Shembulli 6. a) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$; b) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$; c) $\frac{1}{2\sqrt{3}+1}$.

Zgjidhja.

$$a) \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{1}{\sqrt{7}-2} \cdot \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} = \frac{\sqrt{7}+2}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} = \frac{\sqrt{7}+2}{(\sqrt{7})^2-2^2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}.$$

$$b) \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \cdot \frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{(3-\sqrt{2})^2}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{9-6\sqrt{2}+2}{3^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{11-6\sqrt{2}}{7}.$$

$$c) \frac{1}{2\sqrt{3}+1} = \frac{1}{2\sqrt{3}+1} \cdot \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-1} = \frac{2\sqrt{3}-1}{(2\sqrt{3})^2-1} = \frac{2\sqrt{3}-1}{12-1} = \frac{2\sqrt{3}-1}{11}.$$

Shembulli 7. $\left(\frac{12}{\sqrt{5}+1} + \frac{7}{\sqrt{5}-2} + \frac{4}{3-\sqrt{5}} \right) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14}$.

Zgjidhja.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{12}{\sqrt{5}+1} + \frac{7}{\sqrt{5}-2} + \frac{4}{3-\sqrt{5}} \right) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14} \\ &= \left(\frac{12}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} + \frac{7}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} + \frac{4}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \right) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{12\sqrt{5}-12}{5-1} + \frac{7\sqrt{5}+14}{5-4} + \frac{12+4\sqrt{5}}{9-5} \right) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14} \\
&= \left(\frac{12(\sqrt{5}-1)}{4} + 7\sqrt{5}+14 + (3+\sqrt{5}) \right) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14} \\
&= (3\sqrt{5}-3+7\sqrt{5}+14+3+\sqrt{5}) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14} \\
&= (11\sqrt{5}+14) \cdot \frac{1}{11\sqrt{5}+14} = 1.
\end{aligned}$$

Shembulli 8. a) $\frac{x+y}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; b) $\frac{2x+1}{4^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+(2x)^{\frac{1}{3}}+1} + \frac{2x-1}{1-\sqrt[3]{2x}}$.

Zgjidhja.

a)
$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}} &= \frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
&= \frac{(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - (x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\
&= \frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}+y\sqrt{y} - (x\sqrt{x}-x\sqrt{y}-y\sqrt{x}+y\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\
&= \frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}+y\sqrt{y} - x\sqrt{x}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\
&= \frac{2x\sqrt{y}+2y\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{2\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}.
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{4^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+(2x)^{\frac{1}{3}}+1} + \frac{2x-1}{1-\sqrt[3]{2x}} &= \frac{2x+1}{(2^2)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+(2x)^{\frac{1}{3}}+1} + \frac{1-2x}{\sqrt[3]{2x}-1} \\
&= \frac{2x+1}{(2x)^{\frac{2}{3}}+(2x)^{\frac{1}{3}}+1} + \frac{1-2x}{(2x)^{\frac{1}{3}}-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(2x+1) \cdot \left((2x)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) + (1-2x) \cdot \left((2x)^{\frac{2}{3}} + (2x)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)}{\left((2x)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \cdot \left((2x)^{\frac{2}{3}} + (2x)^{\frac{1}{3}} + 1 \right)} \\ &= \frac{(2x)(2x)^{\frac{1}{3}} - 2x + (2x)^{\frac{1}{3}} - 1 + (2x)^{\frac{2}{3}} + (2x)^{\frac{1}{3}} + 1 - (2x)(2x)^{\frac{2}{3}} - (2x)(2x)^{\frac{1}{3}} - 2x}{\left((2x)^{\frac{1}{3}} \right)^3 - 1} \\ &= \frac{(2x)^{\frac{2}{3}}(1-2x) + 2(2x)^{\frac{1}{3}} - 4x}{2x-1}. \end{aligned}$$

Detyra për ushtrime

Njehsoni:

1. a) 2^0 ; b) 3^0 ; c) 1^0 ; d) $\left(\frac{1}{4}\right)^0$; e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^0$;
 f) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^0$; g) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^0$; h) x^0 ; i) $\left(\frac{x+1}{2}\right)^0$; j) $\left(\frac{x+\sqrt{2}}{\pi}\right)^0$.
2. a) $(x^0 + 2y)^0$; b) $(x + 2z^0 + 3y^0)^0$; c) $x^0 + y^0 + (z^2)^0$.
3. a) $2(a + b^2)^0$; b) $(2(a^2 + b)^0)^0$; c) $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4^0}\right)^0$.
4. a) $x^0 \cdot y^0 + 1$; b) $x^0 \cdot \frac{3}{4}$; c) $x^0 : x^2$;
 d) $x^0 \cdot x^2$; e) $x^2 : x^0$; f) $x^2 \cdot x^0 + \frac{1}{2}$.
5. a) $(x - 3y)^0$; b) $x^0 - 3y^0$; c) $x^0 - (3y)^0$; d) $x^0 - 3^0 \cdot y$.
6. a) 2^{-1} ; b) 2^{-2} ; c) 3^{-2} ; d) 4^{-3} ; e) $(-2)^{-2}$.
7. a) $\frac{1}{2^{-3}}$; b) $\frac{3}{2^{-4}}$; c) $\frac{2}{3^{-2}}$; d) $\frac{-5}{(-4)^{-1}}$; e) $\frac{a}{a^2}$.
8. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; b) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$; c) $\left(1\frac{3}{4}\right)^{-3}$; d) $(0.4)^{-1}$; e) $(-0.5)^{-1}$.
9. a) $3 \cdot 2^{-1}$; b) $2^2 \cdot 3^{-1}$; c) $2^4 \cdot 4^{-2}$; d) $8^2 \cdot 4^{-4}$; e) $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.
10. a) x^{-2} ; b) x^{-4} ; c) $\frac{x}{y^{-3}}$; d) $\frac{3(x+y)}{(x+y)^{-2}}$.
11. a) $2^{-2} + 3^{-2} + 1^{-3} + 4^{-2}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$;
 c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$; d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

12. a) $((-2)^{-2} \cdot (-3)^{-3}) : (-4)^{-1}$; b) $(2^5 \cdot (-5)^{-2}) \cdot 25 + \left(2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)^0$;
 c) $\left(1\frac{1}{2} - \left(1\frac{2}{3}\right)^0\right) \cdot \left(1\frac{1}{3} - \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)$;
 d) $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3}\right)^{-2} + \left(\left(1\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right)$.

Në shprehjet vijuese të kryhen veprimet ashtu që të liroheni nga fuqitë negative.

13. a) $ax^{-1}y^{-2}$; b) $(a^2)^{-3}x^{-2}c^{-3}$; c) $(ab^2c^3)^{-2}x^{-4}$.
 14. a) $\frac{2}{x^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot a^{-4}}$; b) $\frac{1}{x^{-3}y^{-4}z}$; c) $\frac{3}{4^{-1}x^{-1}(x+y)^{-2}}$.
 15. a) $\frac{x^{-3}y^{-2}z}{a^{-2}b^{-3}}$; b) $\frac{x^{-1}y^{-3}(z+2)^{-2}}{3^{-1}x(y+2)^{-1}}$; c) $\frac{a^{-2}b}{(b+1)^{-3}(a-1)^{-2}}$.
 16. a) $(x-y)^{-3} \cdot \frac{1}{2^{-1} \cdot x^{-3}}$; b) $\frac{(x-z)^{-2}}{(x+y-z)^{-2}}$; c) $\frac{x^{-3}a^{-4}b^{-5}}{3^{-1}y^{-2}}$.

Shprehjet e dhëna të shkruhen në formë të prodhimit të fuqive:

17. a) $\frac{a}{b^2}$; b) $\left(\frac{x}{y}\right)^2$; c) $\frac{1}{x}$; d) $\frac{1}{a^3}$.
 18. a) $\frac{xy}{z^2}$; b) $\frac{xy^2}{z^3t^4}$; c) $\left(\frac{ab}{xyz}\right)^3$; d) $\frac{ax}{(by)^2}$.
 19. a) $\frac{x}{(x-y)^2}$; b) $\frac{(x-y)^{-2}}{(x+y)^{-3}}$; c) $\frac{x}{y^{-2}(x-y)^{-3}}$; d) $\frac{x^2}{x(x+a)^3}$.
 20. a) $\frac{3x^2y^{-3}}{4z^{-2}(y+1)}$; b) $\frac{(x-1)^{-3}}{4^{-2}(x-2)^{-5}}$; c) $\frac{2x^{-3}y}{3x^{-3}t^4}$; d) $\frac{2(x+y)^2}{4a(x-y)^{-3}}$.
 21. a) $\frac{x}{y^{2n}}$; b) $\left(\frac{1}{x-y}\right)^{n+1}$; c) $\frac{x}{y^t z^c}$; d) $\frac{a^m}{b^n c^{-t}}$.

Njehsoni:

$$22. \quad a) \quad 2^{-2} + 3^{-1} + \frac{1}{4^{-3}};$$

$$b) \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \cdot \frac{12}{2^{-3}};$$

$$c) \quad \frac{1}{3^{-2}} : \left(\frac{3}{5}\right)^{-3};$$

$$d) \quad 2^{-3} - \left(1\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot (2^{-1})^{-2}.$$

Të kryhen veprimet me fuqi:

$$23. \quad \left(\frac{x^3 \cdot x^2}{x^4}\right)^2 \cdot \frac{x^3 : x^2}{x}.$$

$$24. \quad (0.2x^{-3}y^{-2})^2 \cdot \left(\frac{x^{-2}}{2y^3}\right)^{-2}.$$

$$25. \quad \left(-\frac{7x^2}{3y^4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{9y^2}{49x^4}\right)^{-2}.$$

$$26. \quad \left(\frac{x^3y^{-2}}{9y^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^2y^{-3}}{6y^3}\right)^2.$$

$$27. \quad \left(\frac{8x^2y}{12y^2x} : \frac{xy}{x^3y^2}\right) : \frac{15x^2y^{-2}}{3xy^{-1}}.$$

$$28. \quad \left(\frac{x^5}{y^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-2y^2}{x^4}\right)^{-3}.$$

$$29. \quad \left(\frac{-x^3}{y^5}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{3y^7}{x^3}\right)^{-2}.$$

$$30. \quad \left(\frac{1}{6}x^{-1}y^3\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-4}.$$

$$31. \quad \left(\frac{1}{2}x^{-1}y^3\right)^{-3} : (x^{-2} : y^{-8}).$$

$$32. \quad \frac{(x^2y^3)^{-8} \cdot (x^4y^6)^6}{(x^4y^6)^2 \cdot (x^{-1}y^{-2})^3} \cdot \frac{((x^2y)^{-4} : (x^5y^3)^2)}{(x^3)^{-5} \cdot y^7} : \left(\frac{1}{y}\right)^{11}.$$

Njehsoni

$$33. \quad a) \quad \sqrt[3]{8 \cdot 27};$$

$$b) \quad \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4};$$

$$c) \quad \sqrt[5]{6^5 \cdot 3^5};$$

$$d) \quad \sqrt{20} \cdot \sqrt{5};$$

$$e) \quad \sqrt[4]{72 \cdot 18};$$

$$f) \quad \sqrt{27} \cdot \sqrt{12}.$$

$$34. \quad \sqrt[5]{7^3 \cdot 2^2} \cdot \sqrt[5]{7^2 \cdot 2^3}.$$

$$35. \quad \sqrt{8\sqrt{4\sqrt[3]{64}}}.$$

$$36. \quad \sqrt{5(\sqrt{2}-1)^2} + 3\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}.$$

$$37. \quad \sqrt{12} + \sqrt{45} + \sqrt{18}.$$

$$38. \quad 5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} - \frac{5}{4}\sqrt{20}.$$

$$39. \quad (3\sqrt{5}-2)(3\sqrt{5}-1).$$

$$40. \quad \left(2\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{8}\right) \cdot 3\sqrt{6}.$$

$$41. (2\sqrt{6} - 3\sqrt{5} + 1) : 3 - (\sqrt{6} + 2\sqrt{5} - 3) : 5 - (3\sqrt{6} + 4\sqrt{5} - 1) : 15.$$

$$42. \left(\frac{1}{2}\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10} \right) \cdot (\sqrt{2} + 3\sqrt{1.6} + 5\sqrt{0.4}).$$

$$43. (12\sqrt{50} - 8\sqrt{200} + 7\sqrt{450}) : \sqrt{10}.$$

$$44. \left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{4}{5}} \right) : \left(\frac{2}{7}\sqrt{\frac{1}{8}} \right).$$

$$45. (\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}})(\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}).$$

Njehsoni

$$46. 2\sqrt{18} + 3\sqrt{8} + 3\sqrt{32} - \sqrt{50}.$$

$$47. (2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2}).$$

$$48. (4 + \sqrt{6})(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3}).$$

Të racionalizohet emëruesi:

$$49. a) \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$b) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}};$$

$$c) \frac{2}{\sqrt[4]{49}};$$

$$50. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}.$$

$$51. \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}.$$

$$52. \frac{2}{2\sqrt{2} - 1}.$$

$$53. \frac{1}{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}.$$

$$54. \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}.$$

$$55. \frac{4}{3\sqrt{2} + 1}.$$

$$56. \frac{1}{2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}.$$

5

Barazimet kuadratike

Barazimi i formës

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ku a, b, c janë numra realë, dhe $a \neq 0$ quhet *barazim kuadratik*

Barazimi kuadratik më së shumti mund të ketë dy zgjidhje.

Në këtë njësi do të shqyrtojmë disa forma dhe tipe të ndryshme të barazimeve kuadratike.

Rasti I. Nëse $b = 0$, barazimi kuadratik kalon në formën

$$ax^2 + c = 0, a \neq 0.$$

Le të ilustrojmë përmes shembujve zgjidhjen e barazimeve kuadratike të kësaj forme.

Shembulli 1. Të zgjidhen barazimet kuadratike:

a) $2x^2 - 18 = 0$;

b) $9x^2 - 16 = 0$;

c) $3x^2 - 7 = 0$;

d) $x^2 + 1 = 0$.

Zgjidhja.

a) Kemi

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3.$$

Pra $x = 3$ ose $x = -3$.

b) Duke vepruar ngjashëm merret:

$$9x^2 - 16 = 0$$

$$9x^2 = 16$$

$$x^2 = \frac{16}{9}$$

$$x^2 = \pm\sqrt{\frac{16}{9}}$$

$$x = \pm\frac{4}{3}.$$

c) $3x^2 - 7 = 0$

$3x^2 = 7$

$x^2 = \frac{7}{3}$

$x = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}$

d) $x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

që nuk ka zgjidhje reale sepse katrori i çfarëdo numri real çdo herë është pozitiv (ose zero) e asnjëherë negativ.

Detyra plotësuese

Të zgjidhen barazimet kuadratike:

1. $4x^2 - 36 = 0$.

2. $4x^2 - 81 = 0$.

3. $36x^2 - 100 = 0$.

4. $2x^2 - 10 = 0$.

5. $x^2 + 2 = 0$.

6. $16x^2 - 9 = 0$.

7. $16x^2 - 25 = 0$.

8. $25x^2 - 36 = 0$.

9. $25x^2 + 81 = 0$.

Rasti II. Nëse $c = 0$, barazimi merr trajtën

$$ax^2 + bx = 0, a \neq 0.$$

Edhe këtë rast do ta ilustruon me anë të shembujve.

Shembulli 2. Të zgjidhen barazimet kuadratike

a) $3x^2 + 5x = 0$;

b) $x^2 - x = 0$;

c) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x = 0$.

Zgjidhja.

a) Kemi:

$3x^2 + 5x = 0$

$x(3x + 5) = 0$

$x = 0$ ose $3x + 5 = 0$

$3x + 5 = 0, x = -\frac{5}{3}$.

Pra $x = 0$ ose $x = -\frac{5}{3}$

b) Ngjashëm merret:

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 0$ ose $x - 1 = 0$

$x = 0$ ose $x = 1$.

c) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x = 0$

$x(\sqrt{3}x + \sqrt{2}) = 0$

$x = 0$ ose $\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$

$x = 0$ ose $x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Detyra plotësuese

Të zgjidhen barazimet kuadratike:

$$10. x^2 + x = 0.$$

$$11. x^2 - 2x = 0.$$

$$12. \sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x = 0.$$

$$13. 4x^2 + 5x = 0.$$

$$14. x^2 + (a+b)x = 0.$$

$$15. ax^2 + 2x = 0.$$

$$16. x^2 - \frac{7}{2}x = 0.$$

$$17. 5x^2 + 4x = 0.$$

$$18. x^2 + \frac{x}{2} = 0.$$

Në rastin e dytë, pamë se shprehjen e faktorizonim.

Në fakt, në situatat kur faktorizimi mund të kryhet lehtë, barazimet kuadratike mund të zgjidhim duke kryer faktorizimin.

Le të kuptojmë këtë nga shembujt vijues:

Shembulli 3. Të zgjidhen barazimet kuadratike

$$a) x^2 - 5x + 6 = 0;$$

$$b) x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$$c) x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Zgjidhja.

a) Faktorizojmë ekuacionin e dhënë:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

Pra $x-2=0$ ose $x-3=0$ prej nga merret $x=2$ ose $x=3$.

b) Veprojmë ngjashëm.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x-1=0 \text{ ose } x-2=0$$

$$x=1 \text{ ose } x=2.$$

c) Meqë $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$(x-3)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0 \Rightarrow (x-3) = 0$$

$$x=3.$$

Pra $x=3$ është zgjidhja e vetme.

Detyra plotësuese

Duke faktorizuar të zgjidhen barazimet kuadratike:

$$19. x^2 + 3x + 2 = 0. \quad 20. x^2 - 3x - 4 = 0. \quad 21. x^2 - x - 6 = 0.$$

$$22. x^2 - 4x + 3 = 0. \quad 23. x^2 - 5x - 14 = 0. \quad 24. x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Ka situata kur faktorizimi nuk është lehtë të kryhet ose madje kur ana e majtë e barazimit nuk mund të faktorizohet fare.

Në këtë rast përdorim formulën kuadratike për zgjidhjen e barazimeve kuadratike.

Formula kuadratike

Nëse $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ **atëherë**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Shprehja $D = b^2 - 4ac$ në formulën kuadratike quhet *dallori (diskriminanta) i barazimit kuadratik*.

Varësisht nga vlerat e D -së kemi këto raste:

1) Nëse $D > 0$, barazimi ka dy zgjidhje të ndryshme:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

2) Nëse $D = 0$, barazimi ka një zgjidhje

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

3) Nëse $D < 0$, barazimi nuk ka zgjidhje reale, sepse numrat negativ nuk kanë rrënjë katrore.

Shembulli 4. Të zgjidhet barazimi kuadratik

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Zgjidhja.

Vërejmë se $a = 1$, $b = -3$, $c = -4$.

Duke zbatuar formulën kuadratike merret:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}.$$

$$\text{Pra } x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Shembulli 5. Të zgjidhet barazimi kuadratik

$$x^2 + 8x + 16 = 0.$$

Zgjidhja.

Vërejmë se $a = 1, b = 8, c = 16$.

Duke zbatuar formulën kuadratike, merret:

$$x_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{-8 \pm 0}{2}$$

$$\text{Pra } x_1 = x_2 = -\frac{8}{2} = -4.$$

D.m.th. kemi një zgjidhje.

Shembulli 6. Të zgjidhet barazimi kuadratik

$$x^2 - x + 1 = 0.$$

Zgjidhja.

Kemi $a = 1, b = -1, c = 1$.

Duke zbatuar formulën kuadratike, merret:

$$x_{1/2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Meqë $D = -3 < 0$, përfundojmë se barazimi nuk ka zgjidhje reale.

Detyra plotësuese

Të zgjidhen barazimet kuadratike:

$$25. \quad x^2 + 2x - 24 = 0. \quad 26. \quad x^2 + 2x + 1 = 0. \quad 27. \quad x^2 + 2x - 1 = 0.$$

$$28. \quad 2x^2 - x - 6 = 0. \quad 29. \quad \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0. \quad 30. \quad x^2 - x = 1.$$

Shembulli 7. $(x-2)^2 + (2x+3)^2 = 13 - 4x$.

Zgjidhja.

$$(x-2)^2 + (2x+3)^2 = 13 - 4x$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 9 = 13 - 4x$$

$$5x^2 + 8x + 13 = 13 - 4x$$

$$5x^2 + 12x = 0$$

$$x(5x + 12) = 0$$

Pas zgjidhjes merret $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{12}{5}$.

Shembulli 8. $(2x - 15)(2x - 7) - (x - 36)(x - 8) + 36 = 0$.

Zgjidhja.

$$(2x - 15)(2x - 7) - (x - 36)(x - 8) + 36 = 0$$

$$4x^2 - 14x - 30x + 105 - (x^2 - 8x - 36x + 288) + 36 = 0$$

$$3x^2 - 44x + 105 + 44x - 288 + 36 = 0$$

$$3x^2 + 141 - 288 = 0 \quad 3x^2 = 147$$

$$x^2 = 49 \quad \text{pra } x_{1,2} = \pm 7.$$

Shembulli 9. Të zgjidhet barazimi kuadratik

$$x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{6} = 0.$$

Zgjidhja.

Mënyra e parë:

Vërejmë se $a = 1, b = \frac{5}{6}, c = -\frac{1}{6}$. Atëherë

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{5}{6} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)}}{2 \cdot 1} = \frac{-\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{24}{36}}}{2 \cdot 1} = \frac{-\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36}}}{2} = \frac{-\frac{5}{6} \pm \frac{7}{6}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{5}{6} + \frac{7}{6}}{2} = \frac{\frac{2}{6}}{2} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{-\frac{5}{6} - \frac{7}{6}}{2} = \frac{-\frac{12}{6}}{2} = -1.$$

Mënyra e dytë:

Të dy anët e barazimit

$$x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{6} = 0$$

i shumëzojmë me 6.

Merret $6x^2 + 5x - 1 = 0$.

Në këtë rast kemi: $a = 6, b = 5, c = -1$. Atëherë:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{12} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-5 \pm 7}{12}.$$

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{-5 - 7}{12} = \frac{-12}{12} = -1.$$

Detyra për ushtrime

Të zgjidhen barazimet kuadratike.

1. $x^2 - 9 = 0$.

2. $x^2 - 49 = 0$.

3. $x^2 - \frac{49}{16} = 0$.

4. $25 - x^2 = 0$.

5. $x^2 - \frac{1}{2} = 0$.

6. $\frac{3}{4} - x^2 = 0$.

7. $x^2 + \frac{1}{4} = 0$.

8. $x^2 + 3 = 0$.

9. $x^2 - 2x = 0$.

10. $3x - x^2 = 0$.

11. $x^2 - \frac{1}{2}x = 0$.

12. $\frac{4}{3}x^2 + \frac{3}{4}x = 0$.

13. $x^2 = x$.

14. $x^2 = -x$.

15. $x^2 - 10x + 16 = 0$.

16. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

17. $x^2 - 10 + 24 = 0$.

18. $x^2 + 8x + 15 = 0$.

19. $x^2 + 10x + 21 = 0$.

20. $x^2 + 4x - 5 = 0$.

21. $x^2 + x + 1 = 0$.

22. $x^2 + 4x + 1 = 0$.

23. $x^2 + 6x + 8 = 0$.

24. $x^2 + x - 6 = 0$.

25. $x^2 - 16x + 60 = 0$.

26. $x^2 + 3x + 2 = 0$.

27. $x^2 + 3x + 2 = 0$.

6

Funksioni linear

Funksioni i trajtës

$$y = ax + b \quad a, b \in R \quad (\text{apo } f(x) = ax + b)$$

quhet *funksion linear*.

Numri real α quhet zero e funksionit nëse $f(\alpha) = 0$.

Nëse $f(x) = 0$ atëherë $ax + b = 0$ prej nga $x = -\frac{b}{a}, a \neq 0$.

D.m.th. zero e funksionit linear është $-\frac{b}{a}$, sepse

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0.$$

Pika $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ është pikëprerja e grafikut të funksionit linear dhe boshtit Ox .

Nëse $b = 0$, atëherë $y = b$. D.m.th. pika $(0, b)$ është pikëprerja e grafikut të funksionit linear dhe boshtit Oy .

Nëse $a = 0$, grafiku kalon nëpër origjinë të sistemit koordinativ.

Të paraqiten grafikisht funksionet:

Shembulli 1. a) $y = x$;

b) $y = -x$.

Zgjidhja.

Grafiku i funksionit linear paraqet drejtëz dhe për të përcaktuar drejtëzën mjafton të përcaktojmë dy pika të saj.

a) Caktojmë dy pika të drejtëzës.

x	0	1
$y = x$	0	1

Pra, pikat $O(0,0)$; $A(1,1)$ i takojnë drejtëzës $y = x$. (figura 1)

b) Veprojmë ngjashëm (shih. figurën 2)

x	0	1
$y = -x$	0	-1

Pra, $A(0,0)$, $B(1,-1)$ janë dy pika të drejtëzës.

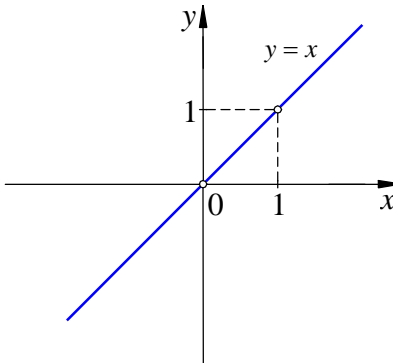


Figura 1

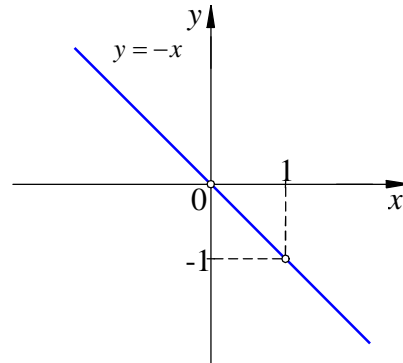


Figura 2

Shembulli 2. a) $y = \frac{1}{2}x$;

b) $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Zgjidhja.

a) Veprojmë ngjashëm (shih. figurën 3)

x	0	1
$y = \frac{1}{2}x$	0	$\frac{1}{2}$

Pra kemi caktuar dy pika të drejtëzës dhe ato janë $A(0,0)$, $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$

b) Për $x=0$; $y = \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$.

Për $x=2$; $y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 3$. (figura 4).

x	0	2
$y = \frac{1}{2}x + 2$	2	3

Pra pikat $A(0, 2)$, $B(2, 3)$ janë dy pika të drejtëzës.

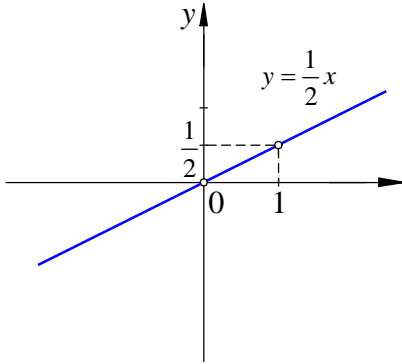


Figura 3

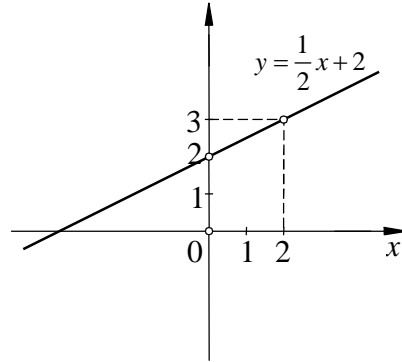


Figura 4

Shembulli 3. a) $y = \frac{1}{2}x - 3$; b) $y = -x + 2$.

Zgjidhja.

a) Caktojmë dy pika të drejtëzës (figura 5)

x	0	2
$y = \frac{1}{2}x - 3$	-3	-2

Pikat $A(0, -3)$, $B(2, -2)$ janë dy pika të drejtëzës.

b) Caktojmë dy pika të drejtëzës (figura 6)

x	0	1
$y = -x + 2$	2	1

Pikat $A(0, 2)$, $B(1, 1)$ janë dy pika të drejtëzës.

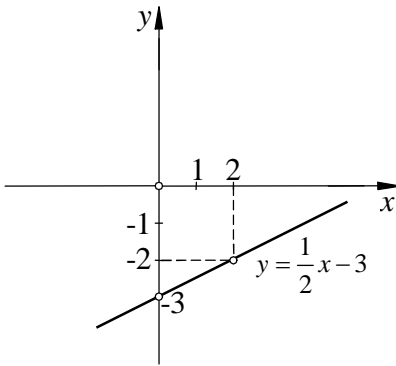


Figura 5

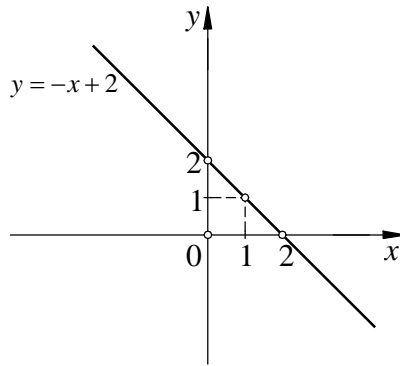


Figura 6

Shembulli 4. a) $y = -2x + 3$; b) $y = -3x + \frac{1}{3}$.

Zgjidhja.

a) Caktojmë dy pika të drejtëzës (figura 7)

x	0	1
$y = -2x + 3$	3	1

Kemi caktuar dy pika të drejtëzës $A(0,3)$, $B(1,1)$.

b) Caktojmë dy pika të drejtëzës (figura 8)

x	0	1
$y = -3x + \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$

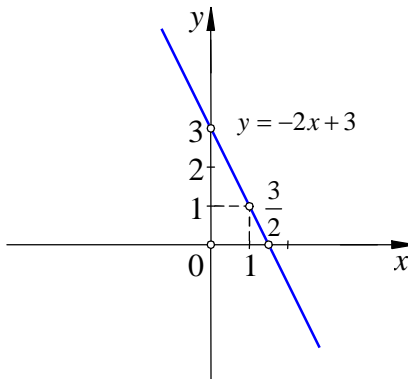


Figura 7

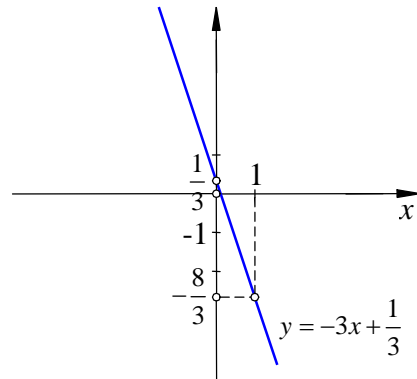


Figura 8

Detyra për ushtrime

Të paraqiten grafikisht funksionet lineare:

1. $y = 2.$

2. $y = -3.$

3. $x = 4.$

4. $x = -4.$

5. $y = x + 1.$

6. $y = x - 3.$

7. $y = -x + 4.$

8. $y = -x - 3.$

9. $y = -\frac{1}{2}x + 1.$

10. $y = \frac{1}{3}x - 2.$

11. $x + y = 4.$

12. $x - y = 7.$

13. $-x + 2y = 3.$

14. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = 5.$

7

Mosbarazimet lineare. Sistemet e mosbarazimeve lineare

1. MOSBARAZIMET LINEARE

Të zgjidhen mosbarazimet. Bashkësia e zgjidhjeve të paraqitet grafikisht.

Shembulli 1. $x - \frac{1}{3} > \frac{2}{3} + 2x$.

Zgjidhja.

$$x - \frac{1}{3} > \frac{2}{3} + 2x$$

$$x - 2x > \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

$$-x > 1 \mid \cdot (-1)$$

$$x < -1.$$

Faktin që $x < -1$ mund të shënojmë edhe si $x \in (-\infty, -1)$.

Shënim. Përkujtojmë se kur mosbarazimin e shumëzojmë me numër negativ atëherë ndryshon shenja e mosbarazimit.

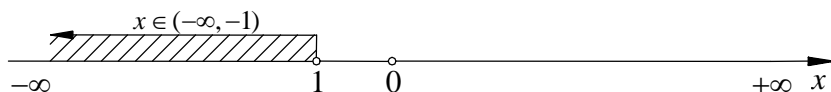


Figura 1

Në këtë rast pika $x = -1$ nuk është zgjidhje e mosbarazimit.

Shembulli 2. $2(x-1) \leq x+4$.

Zgjidhja.

$$2(x-1) \leq x+4$$

$$2x-2 \leq x+4$$

$$x \leq 6,$$

fakt të cilin mund ta shënojmë $x \in (-\infty, 6]$.

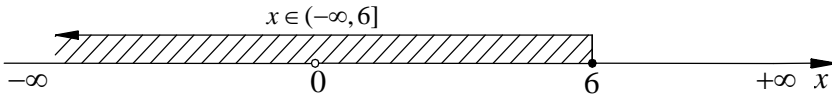


Figura 2

Në këtë rast pika $x = 6$ është zgjidhje e mosbarazimit.

Shembulli 3. $3\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq x - \frac{1}{2}$.

Zgjidhja.

$$3\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq x - \frac{1}{2}$$

$$3x + \frac{3}{2} \geq x - \frac{1}{2}$$

$$3x - x \geq -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$2x \geq -2$$

$$x \geq -1,$$

fakt të cilin mund ta shënojmë $x \in [-1, +\infty)$.

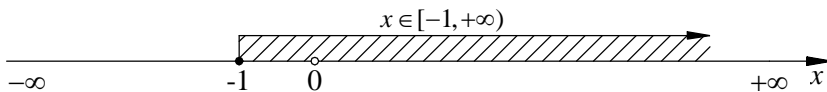


Figura 3

Në këtë rast pika $x = -1$ është zgjidhje e mosbarazimit.

Të zgjidhen mosbarazimet:

Shembulli 4. $2(3-x) < 3(1-2x)$.

Zgjidhja.

$$2(3-x) < 3(1-2x)$$

$$6-2x < 3-6x$$

$$-2x+6x < 3-6$$

$$4x < -3$$

$$x < -\frac{3}{4}, \text{ apo } x \in \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right).$$

Shembulli 5. $\frac{3}{2}(x-1) \leq \frac{1}{2}(x+3)$;

Zgjidhja.

$$\frac{3}{2}(x-1) \leq \frac{1}{2}(x+3) \mid \cdot 2$$

$$3(x-1) \leq (x+3)$$

$$3x-3 \leq x+3$$

$$2x \leq 6$$

$$x \leq 3.$$

Shembulli 6. Të caktohet numri më i vogël i plotë që e plotëson mosbarazimin

$$\frac{2x-3}{4} - \frac{3x-5}{6} > \frac{x}{2} - \frac{2x+1}{3}.$$

Zgjidhja.

Së pari caktojmë bashkësinë e zgjidhjeve të mosbarazimit:

$$\frac{2x-3}{4} - \frac{3x-5}{6} > \frac{x}{2} - \frac{2x+1}{3} \mid \cdot 12$$

$$3(2x-3) - 2(3x-5) > 6x - 4(2x+1)$$

$$6x-9-6x+10 > 6x-8x-4$$

$$2x > -5$$

$$x > -\frac{5}{2}.$$

D.m.th. bashkësia e zgjidhjeve të mosbarazimit është $x \in \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Paraqitja grafike e bashkësisë së zgjidhjeve është si vijon.

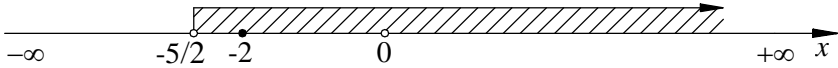


Figura 4

Vërejmë se numri më i vogël i plotë që e plotëson mosbarazimin e dhënë është $x = -2$.

Shembulli 7. Të caktohet numri më i madh i plotë që e plotëson mosbarazimin

$$\frac{2x-1}{10} - 1 < \frac{x+1}{10} - \frac{1}{2}x.$$

Zgjidhja.

Caktojmë bashkësinë e zgjidhjeve të mosbarazimit

$$\frac{2x-1}{10} - 1 < \frac{x+1}{10} - \frac{1}{2}x \mid \cdot 10$$

$$2x-1-10 < x+1-5x$$

$$6x < 12$$

$$x < 2.$$

Pra, përfundojmë se bashkësia e zgjidhjeve të mosbarazimit është $(-\infty, 2)$.

Paraqitja grafike e bashkësisë së zgjidhjeve është si vijon:

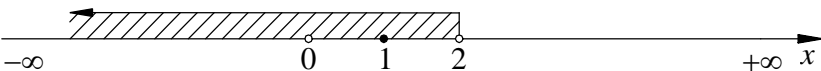


Figura 5

Vërejmë se numri më i madh i plotë që e plotëson mosbarazimin e dhënë është $x=1$.

Në disa lloje detyrash, gjatë zgjidhjes së mosbarazimeve zbatohen ekuivalencat vijuese:

$$1. A \cdot B \geq 0 \Leftrightarrow (A \geq 0 \wedge B \geq 0) \vee (A \leq 0 \wedge B \leq 0)$$

$$2. A \cdot B \leq 0 \Leftrightarrow (A \geq 0 \wedge B \leq 0) \vee (A \leq 0 \wedge B \geq 0)$$

$$3. \frac{A}{B} \geq 0 \Leftrightarrow (A \geq 0 \wedge B > 0) \vee (A \leq 0 \wedge B < 0)$$

$$4. \frac{A}{B} \leq 0 \Leftrightarrow (A \geq 0 \wedge B < 0) \vee (A \leq 0 \wedge B > 0).$$

Duke u bazuar në ekuivalencat e mësipërme të zgjidhen mosbarazimet. Zgjidhjet të paraqiten grafikisht.

Shembulli 8. $(x-2)(x-3) > 0$.

Zgjidhja.

$$(x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow (x-2 > 0 \wedge x-3 > 0) \vee (x-2 < 0 \wedge x-3 < 0)$$

$$\Leftrightarrow (x > 2 \wedge x > 3) \vee (x < 2 \wedge x < 3) \Leftrightarrow x > 3 \vee x < 2$$

Pra $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

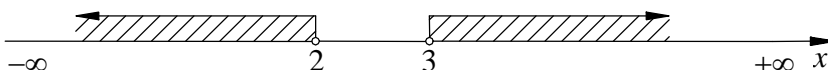


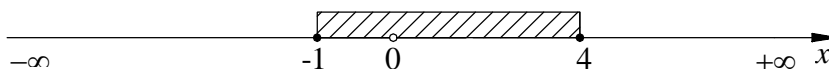
Figura 6

Shembulli 9. $(x+1)(x-4) \leq 0$.

Zgjidhja.

$$(x+1)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1 \geq 0 \wedge x-4 \leq 0) \vee (x+1 \leq 0 \wedge x-4 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x \geq -1 \wedge x \leq 4) \vee (x \leq -1 \wedge x \geq 4) \Leftrightarrow (x \geq -1 \wedge x \leq 4). \text{ Pra } x \in [-1, 4].$$



Shënim. Eshhtë e qartë se nuk ekziston asnjë x me vetitë $x \leq -1 \wedge x \geq 4$, prandaj në rastin $x \leq -1, x \geq 4$ bashkësia e zgjidhjeve është bashkësi boshe.

Shembulli 10. $\frac{x-1}{x-2} \geq \frac{3}{2}$;

Zgjidhja.

Së pari mosbarazimin e dhënë e transformojmë si vijon:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x-2} \geq \frac{3}{2} &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} - \frac{3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-1) - 3(x-2)}{2(x-2)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-2-3x+6}{2(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+4}{2(x-2)} \geq 0 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{4-x}{x-2} \geq 0. \end{aligned}$$

Tani, në bazë të ekuivalencës 3) merret:

$$\begin{aligned} (4-x \geq 0 \wedge x-2 > 0) \vee (4-x \leq 0 \wedge x-2 < 0) &\Leftrightarrow (4 \geq x \wedge x > 2) \vee (4 \leq x \wedge x < 2) \\ &\Leftrightarrow (x \leq 4 \wedge x > 2) \vee (x \geq 4 \wedge x < 2) \Leftrightarrow (x \leq 4 \wedge x > 2). \end{aligned}$$

Pra $x \in (2, 4]$.

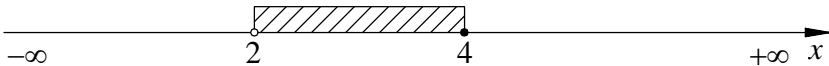


Figura 10

Shembulli 11. Të zgjidhet mosbarazimi i dyfishtë

$$1 < \frac{x-1}{x-3} < 4;$$

Zgjidhja.

Kemi mosbarazimet:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{x-1}{x-3} > 1 \\ \frac{x-1}{x-3} < 4 \end{cases} &\sim \begin{cases} \frac{x-1}{x-3} - 1 > 0 \\ \frac{x-1}{x-3} - 4 < 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \frac{x-1-x+3}{x-3} > 0 \\ \frac{x-1-4x+12}{x-3} < 0 \end{cases} \sim \\ &\begin{cases} \frac{2}{x-3} > 0 & (1) \\ \frac{-3x+11}{x-3} < 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Zgjidhja e mosbarazimit (1) është $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$.

Mosbarazimi (2) është ekuivalent me mosbarazimet:

$$(-3x+11 > 0 \wedge x < 3) \vee (-3x+11 < 0 \wedge x-3 > 0)$$

$$\Leftrightarrow (3x < 11 \wedge x < 3) \vee (3x > 11 \wedge x > 3)$$

$$\Leftrightarrow \left(x < \frac{11}{3} \wedge x < 3 \right) \vee \left(x > \frac{11}{3} \wedge x > 3 \right) \Leftrightarrow x < 3 \vee x > \frac{11}{3}. \quad \text{Pra}$$

$$x \in (-\infty, 3) \cup \left(\frac{11}{3}, +\infty \right).$$

Në një grafik të përbashkët paraqesim bashkësitë e zgjidhjeve të mosbarazimeve (1) dhe (2).

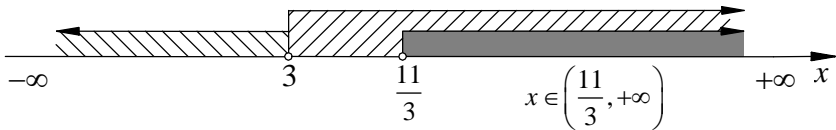


Figura 14

Nga figura vërejmë se $x \in \left(\frac{11}{3}, +\infty \right)$ (Zgjidhja paraqet prerjen e bashkësive të zgjidhjeve të mosbarazimeve (1), (2)).

2. SISTEMET E MOSBARAZIMEVE LINEARE

Shembulli 1. Të zgjidhet grafikisht mosbarazimi

$$x + 3y < 6.$$

Zgjidhja.

Shqyrtojmë barazimin $x + 3y = 6$.

Duke marrë $x = 0$ në këtë barazim merret $y = 2$.

Pra, grafiku e pret boshtin y në pikën $(0, 2)$.

Duke marrë $y = 0$, merret $x = 6$.

Pra, grafiku e pret boshtin x në pikën $(6, 0)$.

Kështu drejtëza $x + 3y = 6$ kalon nëpër pikat $(0, 2), (6, 0)$.

Për të përcaktuar, se cilës anë i përgjigjet zgjidhja, marrim një pikë $P(x, y)$ të çfarëdoshme që nuk i takon drejtëzës për të parë nëse koordinatat e saj e plotësojnë mosbarazimin.

P.sh. $P(0, 0)$. Atëherë

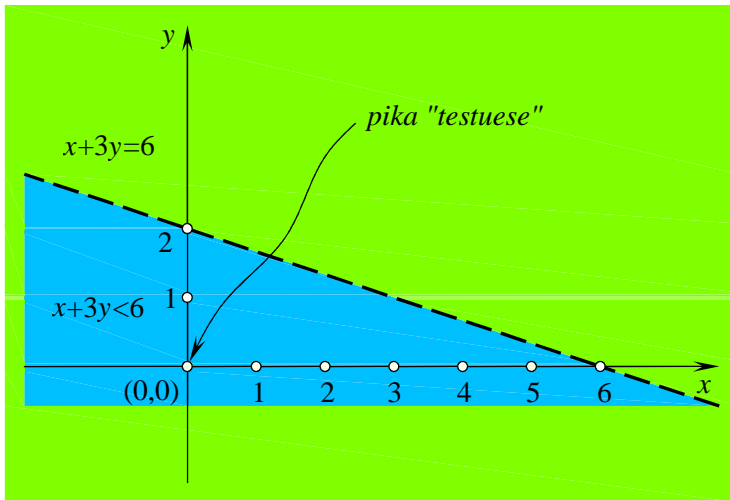
$$0 + 3 \cdot 0 < 4,$$

D.m.th. pika $P(0,0)$ e plotëson mosbarazimin.

Kështu të gjitha pikat në gjysmërrafshin që përmban pikën $(0,0)$ e plotësojnë mosbarazimin.

Pra, bashkësia e zgjidhjeve është bashkësia e të gjitha pikave, nën drejtëz, duke mos e përfshirë, pikat e drejtëzës $x + 3y = 6$.

Në figurën e mëposhtme, pjesa e hijëzuar paraqet zgjidhjen e mosbarazimit.



Shënimi 1. Pika $P(x, y)$ që zgjidhëm quhet “*pikë testuese*”. Zakonisht, me qëllim që njehsimet të lehtësohen si pikë testuese merret pika $P(0,0)$.

Shënimi 2. Pikat mbi drejtëzën $x + 3y = 6$ e plotësojnë mosbarazimin $x + 3y > 6$, gjersa pikat nën drejtëzën plotësojnë mosbarazim $x + 3y < 6$.

Shembulli 2. Të zgjidhet grafikisht mosbarazimi

$$3x + y \leq 5.$$

Zgjidhja.

Veprojmë ngjashëm si në detyrën paraprake.

Shqyrtojmë barazimin

$$3x + y = 5.$$

Caktojmë dy pikat të drejtëzës

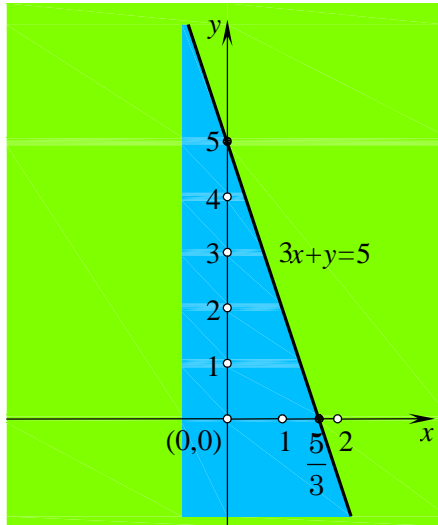
Për $x=0$ merret $y=5$.

Për $y=0$ merret $x=\frac{5}{3}$.

Pra, kemi pikat $(0,5)$ dhe $(\frac{5}{3},0)$.

Pasi të kemi paraqitur grafikisht drejtëzën $3x+y=5$, marrim një pikë testuese. P.sh. pikën $(0,0)$.

Meqë $3 \cdot 0 + 0 < 5$ atëherë përfundojmë se të gjitha pikat që ndodhen në gjysmërrafshin që përmban pikën $(0, 0)$ e paraqesin zgjidhje të mosbarazimit



Shembulli 3. Të zgjidhet grafikisht mosbarazimi $2x - 3y - 9 > 0$

Zgjidhja.

Duke vepruar si në rastet mësipërme gjejmë se drejtëza $2x - 3y - 9 = 0$

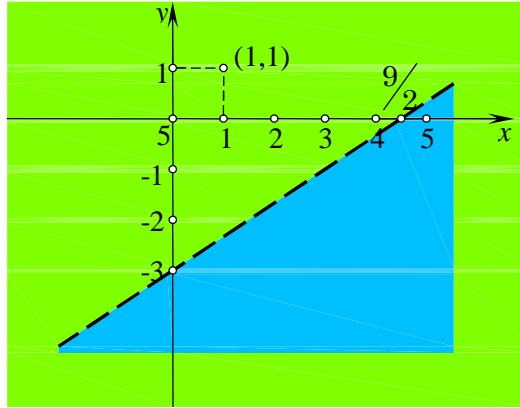
kalon nëpër pikat $(0, -3), (\frac{9}{2}, 0)$.

Pasi të kemi paraqitur grafikisht drejtëzën $2x - 3y - 9 = 0$ marrim një pikë testuese. P.sh. $(1, 1)$.

Meqë

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 9 < 0$$

Përfundojmë se pika $(1, 1)$ nuk e plotësonë mosbarazimin $2x - 3y - 9 < 0$, e me këtë përfundojmë se zgjidhja e mosbarazimit është gjysmërrafshi që nuk e përmban pikën $(1, 1)$.



Shembulli 4. Të paraqitet grafikisht zona e rrafshit që plotëson mosbarazimet:

- a) $x < 3$ b) $y \geq -1$.

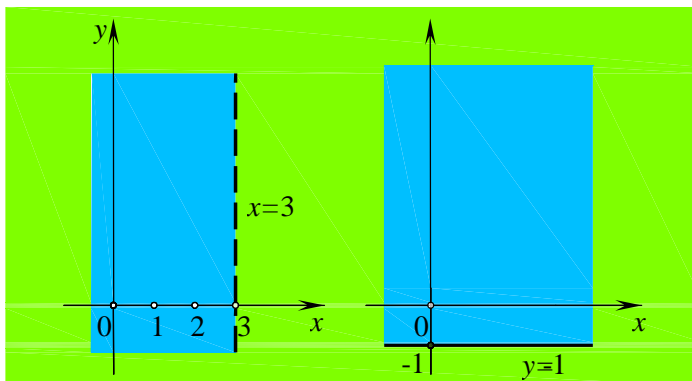
Zgjidhja.

a) Paraqesim drejtëzën $x = 3$.

Bashkësia e zgjidhjeve është gjysmërrafshi në anën e majtë të drejtëzës $x = 3$, duke mos e përfshirë drejtëzën $x = 3$.

b) Paraqesim drejtëzën $y = -1$.

Bashkësia e zgjidhjeve është gjysmërrafshi në anën e sipërme të drejtëzës $y = -1$, duke përfshirë drejtëzën $y = -1$.



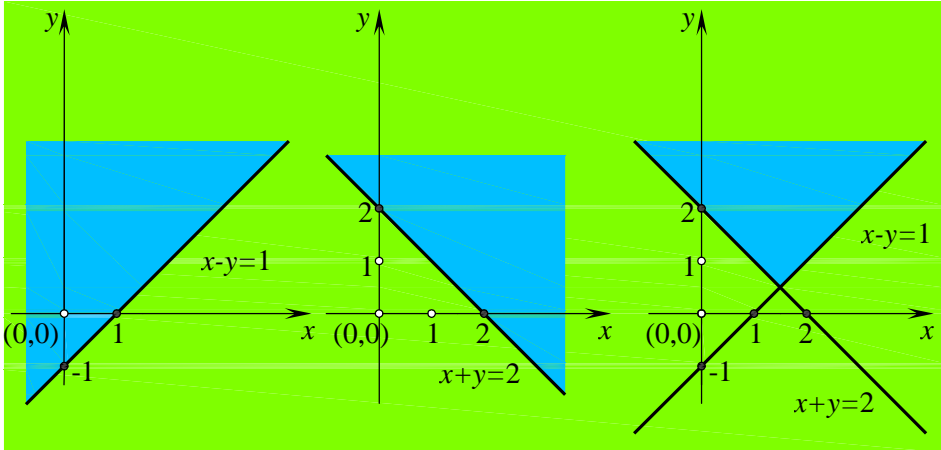
Shembulli 5. Të zgjidhet grafikisht sistemi i mosbarazimeve

$$\begin{cases} x - y \leq 1 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$$

Zgjidhja.

Veprojmë si në shembujt paraprak dhe grafikët e mosbarazimeve $x - y \leq 1$ dhe $x + y \geq 2$ i paraqesim me një grafik të përbashkët.

Zgjidhja e sistemit është prerja e grafikëve



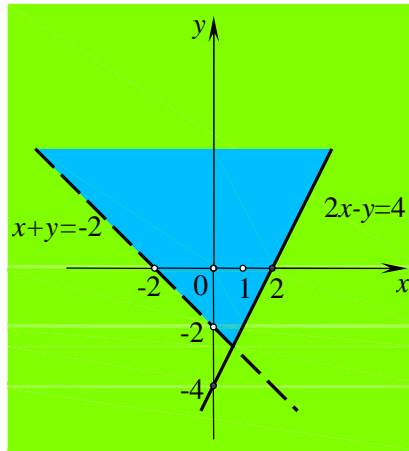
Shembulli 6. Të zgjidhet grafikisht sistemi i mosbarazimeve

$$\begin{cases} x + y > -2 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$$

Zgjidhja.

Grafikët e mosbarazimit $x + y > -2$ dhe $2x - y \leq 4$ i paraqesim me një grafik të përbashkët.

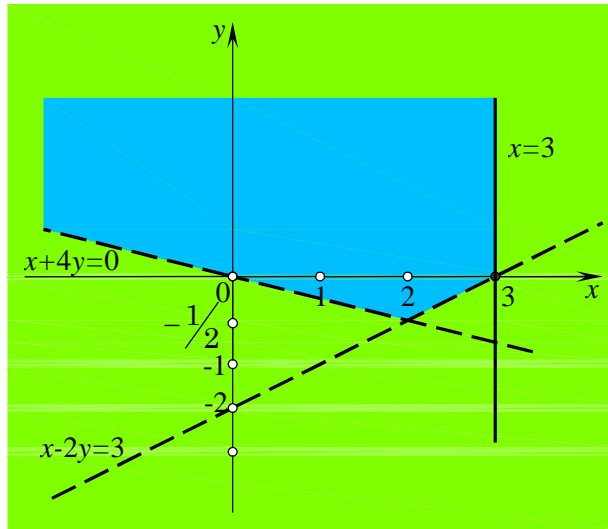
Pjesa me hijëzim më të theksuar paraqet zgjidhjen e sistemit të mosbarazimeve



Shembulli 7. Të zgjidhet grafikisht sistemi i mosbarazimeve:

$$\begin{cases} x - 2y \leq 3 \\ 3x + 4y > 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

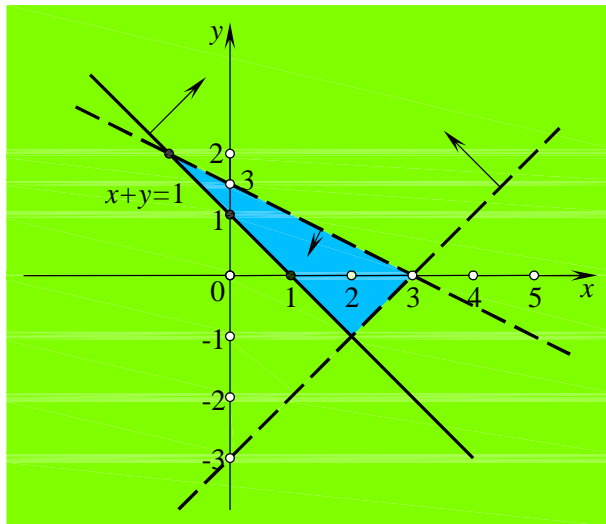
Zgjidhja.



Shembulli 8. Të zgjidhet grafikisht sistemi i mosbarazimeve

$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x - y < 3 \\ x - 2y + 3 > 0 \end{cases}$$

Zgjidhja.



Detyra për ushtrime të pavarura

Të zgjidhen mosbarazimet lineare

1. $2(x-4) \geq x-1.$

2. $\frac{3(x-5)}{4} > \frac{x-3}{5}.$

3. $\frac{2x-1}{3} - \frac{x+1}{4} < 1 - \frac{x}{6}.$

4. $\frac{x-1}{4} + \frac{2x}{3} \geq \frac{1}{12}.$

5. $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{5} \leq \frac{2}{3}.$

6. $\frac{x-2}{3-x} > 0.$

7. $\frac{x+1}{x-1} \leq 0.$

8. $\frac{2x-5}{x-5} < \frac{1}{2}.$

9. $\frac{3-x}{1-x} < -1.$

10. $\frac{4x-1}{2x-3} > 1.$

11. $-2 < \frac{x+1}{2x-3} < 2.$

12. $0 \leq \frac{x-1}{4-x} \leq 3.$

13. $-8x+3(x-2) > -x+2.$

14. $3x+3 < 5(x+1)-2.$

15. $(x-8) \geq 2\left(x+\frac{1}{2}\right)+7.$

16. $7x-1 > 16(x-1)-2.$

17. $(8-x) \leq -7\left(x+\frac{1}{7}\right)-2x.$

18. $\frac{x-5}{x+9} < 0.$

19. $\frac{5x-1.5}{x-49} \geq 0.$

20. $\frac{5x}{3x-1} \leq 0.$

21. $x \leq 3 - \frac{1}{x-1}.$

22. $\frac{2x}{18-x} > 0$

23. $\frac{x+10}{x-5} \leq 0.$

24. $\frac{x+17}{8x} \geq 0.$

25. $\frac{x-1}{x-2} < \frac{3}{2}.$

26. $\frac{5-2x}{5+x} < \frac{1}{2}.$

27. $\frac{6-x}{3-x} < -2.$

28. $\frac{x-1}{x^2+3} < 0.$

29. $\frac{(2x+1)^2}{x-5} > 0.$

30. $\frac{(x-1)^2}{x+2} \geq 0.$

Të paraqiten grafikisht bashkësia e zgjidhjeve të mosbarazimeve.

31. $x+2y < 4.$

32. $2x-3y < 5.$

33. $x - \frac{1}{2} \geq y.$

34. $x+4y < 0.$

35. $y+x \geq 2.$

36. $y-2x \leq 3.$

37. $x-3 \geq y.$

38. $x-2 < y-3.$

39. $x+y-2 \geq 0.$

Të zgjidhen grafikisht sistemet e mosbarazimeve.

$$40. \begin{cases} x - y \leq 2 \\ x + y > 4 \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} x + y > -3 \\ 3x - y \leq 5 \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} x + 2y > 5 \\ -3x + y < 0 \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 3 \\ x + y < 1 \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} x < 3 \\ y \geq -2 \\ x - 2y > 0 \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} x + y < 4 \\ 2x - y > 1 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} x + y - 1 < 0 \\ x - y > -2 \\ y \geq -2 \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} x + 2y > 3 \\ 2x - y < 5 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} x - y - 1 > 0 \\ x + y + 3 < 4 \\ x > -1 \\ y < 1 \end{cases}$$

Shembulli 3. Thyesat e mëposhtme të shprehen në përqindje:

$$\begin{array}{llll} a) \frac{1}{2}; & b) \frac{1}{4}; & c) \frac{1}{5}; & d) \frac{1}{8}; \\ e) \frac{1}{10}; & f) \frac{1}{20}; & g) \frac{1}{50}; & h) \frac{1}{100}; \\ i) 4; & j) 6. & & \end{array}$$

Zgjidhja.

a) Meqë $1 = 100\%$, atëherë $\frac{1}{2} = \frac{100}{2}\% = 50\%$;

Ngjashëm merret:

$$\begin{array}{llll} b) 25\%; & c) 20\%; & d) 12.5\%; & e) 10\%; \\ f) 5\%; & g) 2\%; & h) 1\%; & i) 400\%; \\ j) 600\%. & & & \end{array}$$

Shembulli 4. Përqindjet e dhëna të shkruhen si thyesa:

$$\begin{array}{llll} a) 13\%; & b) 21\%; & c) 29\%; & d) 31\%; \\ e) 70\%; & f) 92\%; & g) 100\%; & h) 124\%. \end{array}$$

Zgjidhja.

$$\begin{array}{llll} a) 13\% = \frac{13}{100}; & b) \frac{21}{100}; & c) \frac{29}{100}; & d) \frac{31}{100}; \\ e) 70\% = \frac{70}{100} = \frac{7 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{7}{10}; & f) 92\% = \frac{92}{100} = \frac{4 \cdot 23}{4 \cdot 25} = \frac{23}{25}; \\ g) 100\% = \frac{100}{100} = 1; & h) 124\% = \frac{124}{100} = \frac{4 \cdot 31}{4 \cdot 25} = \frac{31}{25}. \end{array}$$

Shembulli 5. Përqindjet e dhëna të shkruhen si numra dhjetorë:

$$\begin{array}{llll} a) 24\%; & b) 19\%; & c) 37\%; & d) 75\%; \\ e) 125\%; & f) 115\%; & g) 150\%; & h) 305\%. \end{array}$$

Zgjidhja.

$$\begin{array}{llll} a) 24\% = \frac{24}{100} = 0.24; & b) 0.19; & c) 0.37; & d) 0.75; \\ e) 1.25; & f) 1.15; & g) 1.5; & h) 3.05. \end{array}$$

Njehsoni:

Shembulli 6. 7% të numrave:

- a) 77; b) 194; c) 208; d) 215.

Zgjidhja.

a) 7% e 77 është e barabartë me $\frac{7}{100} \cdot 77 = \frac{539}{100} = 5.39$;

- b) 13.58; c) 14.56; d) 15.05.

Shembulli 7. 12% të numrave:

- a) 96; b) 126; c) 512; d) 1000.

Zgjidhja.

- a) 11.52; b) 15.12; c) 61.44; d) 120.

Shembulli 8. 125% të numrave:

- a) 25; b) 150; c) 270; d) 305.

Zgjidhja.

- a) 31.25; b) 187.5; c) 337.5; d) 381.25.

Shembulli 9. 0.5% të numrave:

- a) 72; b) 160; c) 204; d) 300.

Zgjidhja.

a) 0.5% e 72 është e barabartë me $\frac{0.5}{100} \cdot 72 = 0.36$;

- b) 0.8; c) 1.02; d) 1.5.

Shembulli 10. 12.6% të numrave:

- a) 90; b) 126; c) 192; d) 790.

Zgjidhja.

a) 12.6% e 90 është e barabartë me $\frac{12.6}{100} \cdot 90 = 11.34$;

- b) 15.876; c) 24.192; d) 99.54.

Shembulli 11. 125.2% të numrave:

- a) 74; b) 92; c) 1000; d) 12520.

Zgjidhja.

a) 92.648; b) 115,184; c) 1252; d) 15675.04.

Shembulli 12. 6% të numrave:

a) 66.6 b) 72.8; c) 92.9; d) 100.6.

Zgjidhja.

a) 3.996; b) 4.368; c) 5.574; d) 6.036.

Shembulli 13. Në shkollën e gjuhëve të huaja mësojnë 800 nxënës. 31% e tyre mësojnë gjuhën angleze, 27% gjuhën gjermane, kurse të tjerët mësojnë gjuhën frënge dhe gjuhën spanjolle. Nëse dihet se numër i njëjtë nxënësish e mësojnë gjuhën frënge dhe gjuhën spanjolle, të caktohet sa nxënës e mësojnë secilën gjuhë? (Secili nxënës e mëson vetëm një gjuhë.)

Zgjidhja.

Së pari caktojmë numrin e nxënësve që mësojnë gjuhën angleze dhe gjuhën gjermane.

Dimë se 31% mësojnë gjuhën angleze, d.m.th. $\frac{31}{100} \cdot 800 = 248$ nxënës mësojnë gjuhën angleze.

Po ashtu, 27% mësojnë gjuhën gjermane, d.m.th. $\frac{27}{100} \cdot 800 = 216$ nxënës mësojnë gjuhën gjermane.

Pra, $248 + 216 = 464$ nxënës mësojnë gjuhën angleze dhe gjuhën gjermane.

Meqë shkolla ka 800 nxënës, atëherë $800 - 464 = 336$ nxënës mësojnë gjuhën frënge dhe gjuhën spanjolle. Meqë dihet se numër i njëjtë nxënësish mësojnë gjuhët frënge dhe spanjolle, përfundojmë se 168 nxënës mësojnë gjuhën frënge dhe po aq mësojnë gjuhën spanjolle.

Shënim. Numrin e nxënësve që mësojnë gjuhën frënge dhe gjuhën spanjolle do të mund ta caktonim edhe si vijon:

Meqë 31% mësojnë gjuhën angleze dhe 27% mësojnë gjuhën gjermane atëherë $31\% + 27\% = 58\%$ mësojnë gjuhët angleze dhe gjermane. Pra 42% mësojnë gjuhët frënge dhe spanjolle. Meqë numër i njëjtë nxënësish mësojnë gjuhët frënge dhe spanjolle,

përfundojmë se 21% mësojnë gjuhën frënge dhe po aq gjuhën spanjolle. Tani 21% e numrit 800 është e barabartë me $\frac{21}{100} \cdot 800 = 168$.

Shembulli 14. Në garat komunale të matematikës për nxënësit e klasës së 7-të, morën pjesë 140 nxënës. 30% prej tyre morën shpërblime, 45% morën mirënjohje, kurse të tjerët morën certifikata për pjesëmarrje. Sa nxënës morën shpërblime, mirënjohje dhe certifikata?

Zgjidhja.

Meqë 30% e 140 nxënësve është $\frac{30}{100} \cdot 140 = 42$, themi se 42 nxënës

morën shpërblime. Meqë 45% e 140 nxënësve është $\frac{45}{100} \cdot 140 = 63$,

themi se 63 nxënës morën mirënjohje. Pjesa tjetër $140 - (42 + 63) = 35$ nxënës morën certifikata.

Shembulli 15. Të plotësohen tabelat:

Tabela

Çmimi para zbritjes	1000	1500	1800	2100	4000
Përqindja e ngritjes	25%	4%	12%	20%	35%
Vlera e përqindjes së zbritjes					1400
Çmimi pas zbritjes					2600

Tabela 2

Çmimi para zbritjes			4000		3000
Përqindja e zbritjes	25%	30%		25%	
Vlera e përqindjes së zbritjes	16		120		600
Çmimi pas zbritjes		770		900	

Zgjidhja.

Tabela 1

Çmimi para zbritjes	1000	1500	1800	2100	4000
Përqindja e ngritjes	25%	4%	12%	20%	35%
Vlera e përqindjes së zbritjes	250	60	216	420	1440
Çmimi pas zbritjes	750	1440	1584	1680	2560

Tabela 2

Çmimi para zbritjes	64	1100	4000	1200	3000
Përqindja e zbritjes	25%	30%	3%	25%	20%
Vlera e përqindjes së zbritjes	16	330	120	300	700
Çmimi pas zbritjes	48	770	3880	900	2400

Të njehsohet vlera e x -it, nëse:

Shembulli 16. a) $\frac{2}{5}$ e x -it është 75; b) $1\frac{1}{3}$ e x -it është 66.

Zgjidhja.

a) Duhet të zgjidhim barazimin $\frac{2}{5}x = 75$. Kemi $2x = 5 \cdot 75$, prej nga

$$x = \frac{375}{2} = 187.5. \text{ D.m.th. } \frac{2}{5} \text{ e } 187.5 \text{ është } 75;$$

b) $x = 49.5$.

Shembulli 17. a) 0.5 e x -it është 80; b) 1.6 e x -it është 74.

Zgjidhja.

a) Duhet të zgjidhim barazimin $0.5x = 80$. Kemi $x = \frac{80}{0.5}$, pra $x = 160$.

D.m.th. 0.5 e 160 është 80.

b) $x = 46.25$.

Shembulli 18. a) $\frac{1}{3}$ e x -it është 3.3; b) 0.7 e x -it është $\frac{9}{7}$.

Zgjidhja.

a) $x = 9.9$;

b) $x = \frac{90}{49}$.

Shembulli 19. a) 45% e x -it është 90; b) 27% e x -it është 45.

Zgjidhja.

a) Duhet të zgjidhim barazimin $\frac{45}{100}x = 90$. Kemi $45x = 90 \cdot 100$, prej

nga $x = \frac{45 \cdot 2 \cdot 100}{45} = 200$. D.m.th. 45% e numrit 200 është 90.

b) $x = \frac{500}{3}$.

Shembulli 20. a) 0.7% e x -it është 70; b) 3.6% e x -it është 90.

Zgjidhja.

a) $x = 70$; b) $x = 2500$.

Shembulli 21. a) 42% e x -it është 109.5;

b) 104.5% e x -it është 261.25.

Zgjidhja.

a) $x = 260$; b) $x = 250$.

Shembulli 22. 42% e një numri është 78. Cili është ai numër?

Zgjidhja.

$$x = \frac{100 \cdot 78}{42} = \frac{1300}{7}.$$

Shembulli 23. Nëse 36% të gjysmës së një numri i shtojmë 144, merret 45% e dyfishit të atij numri. Cili është ai numër?

Zgjidhja.

$$x = 200.$$

Shembulli 24. Në shkollën fillore “Sami Frashëri”, numri i nxënësve të klasës së 7-të është 15% e numrit të përgjithshëm të nxënësve të shkollës. Nga shkolla tjetër vijnë 60 nxënës të klasës së 7-të dhe me këtë rast numri i përgjithshëm i nxënësve të klasës së 7-të bëhet 18% e numrit fillestar të përgjithshëm të nxënësve. Sa nxënës ka shkolla dhe sa janë në klasën e 7-të?

Zgjidhja.

Shkolla ka 2000 nxënës, kurse në klasën e 7-të janë 300 nxënës.

Shembulli 25. Pas rritjes 15%, çmimi i një prodhimi është 230 €. Sa ka qenë çmimi para shtrenjtimit?

Zgjidhja.

Çmimi fillestar është 200 euro.

Shembulli 26. Pas zbritjes prej 24%, çmimi i një prodhimi është 76 €. Sa ka qenë çmimi para lirimit?

Zgjidhja.

Le të jetë x çmimi para lirimit. Kushtet e detyrës sjellin barazimin $x - \frac{24}{100}x = 76$, prej nga kemi $\frac{100x - 24x}{100} = 76$. Pra, $76x = 76 \cdot 100$ d.m.th. $x = 100$.

Përfundojmë se çmimi para lirimit ka qenë 100 euro.

Shembulli 27. Është dhënë katërkëndëshi me brinjët $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, $c = 15$ cm, $d = 18$ cm. Sa përqind të perimetrit të katërkëndëshit paraqesin secila nga brinjët?

Zgjidhja.

Perimetri i katërkëndëshit është

$P = a + b + c + d = 12 + 15 + 15 + 18 = 60$ cm. Kështu brinja $a = 12$ cm është

$\frac{1}{5}$ e perimetrit. Më herët kemi parë se thyesa $\frac{1}{5}$ e shprehur në përqindje është 20%.

Brinja $b = 15$ cm (po ashtu edhe brinja $c = 15$ cm), paraqet $\frac{1}{4}$ e

perimetrit ($\frac{1}{4} \cdot 60 = 15$). Thyesa $\frac{1}{4}$ e shprehur në përqindje është 25%.

Brinja $d = 18$ cm është $\frac{3}{10}$ e perimetrit. Thyesa $\frac{3}{10}$ e shprehur në përqindje është 30%.

Përfundojmë se brinja a paraqet 20% të perimetrit, brinja b paraqet 25% të perimetrit, po ashtu edhe brinja c paraqet 25% të perimetrit, kurse brinja d paraqet 30% të perimetrit.